

# فهرست



درس‌نامه      سوالات چندگزینه‌ای

- فصل اول: مجموعه‌ها ..... ۷ ..... ۳۲
- فصل دوم: عددهای حقیقی ..... ۵۴ ..... ۷۲
- فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه ..... ۸۹ ..... ۱۱۷
- فصل چهارم: توان و ریشه ..... ۱۴۴ ..... ۱۵۸
- فصل پنجم: عبارتهای جبری ..... ۱۸۳ ..... ۱۹۸
- فصل ششم: خط و معادله‌های خطی ..... ۲۱۸ ..... ۲۳۶
- فصل هفتم: عبارتهای گویا ..... ۲۵۶ ..... ۲۶۸
- فصل هشتم: حجم و مساحت ..... ۲۷۷ ..... ۲۹۶



# مجموعه‌ها

## فصل ۱



### ● معرفی مجموعه‌ها

به دسته‌ای از اشیاء متمایز و مشخص مجموعه می‌گویند. هر کدام از این اشیاء عضوی از مجموعه هستند. در مورد مجموعه و شناخت آن موارد زیر را با دقت بخوانید و در تعیین مجموعه‌های مختلف به کار ببرید:

- ① مجموعه باید برای همهٔ افراد معلوم، معین و یکسان باشد. به طور مثال «آدم‌های خوب محله» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. چون خوب بودن آدم‌ها از نظر افراد مختلف، متفاوت است و ممکن است این مجموعه برای همه یکسان نباشد؛ اما عبارت «دانش‌آموزانی که در پایهٔ نهم سال ۹۸ در ایران نمرهٔ انضباط ۲۰ گرفته‌اند»، یک مجموعه را مشخص می‌کند. چون اعضای این مجموعه برای همهٔ افراد معلوم و یکسان است.
- ② اعضای مجموعه حتماً باید بین دو آکولاد  $\{\dots\}$  نوشته شوند و بین اعضای مجموعه علامت کاما (,) گذاشته می‌شود.

مجموعه نیست.  $1, 7, 4, 2 \Rightarrow$

مجموعه است.  $\{1, 7, 4, 2\} \Rightarrow$

③ هر چیز معلوم و معینی می‌تواند عضو مجموعه باشد. مانند عدد، شکل، علامت، حرف و ...؛ حتی یک مجموعه می‌تواند عضو مجموعه‌ای دیگر باشد. به طور مثال،  $\{5, \bigcirc, +, 6\}$  یا  $\{1, 2\}$ ،  $-2$ ،  $\{8\}$ ،  $7$  مجموعه هستند.

④ در مجموعه نمی‌توانیم عضو تکراری بنویسیم و عضو تکراری باید حذف شود.

⑤ در نوشتن اعضای مجموعه ترتیب آن مهم نیست و جابه‌جا کردن اعضا مجموعه را تغییر نمی‌دهد. به طور مثال:

$$\{5, 6, 7, 9\} = \{7, 5, 9, 6\}$$

$$\{a, b, c, d\} = \{b, a, d, c\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ یا } B = \{0, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\} \text{ یا } P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

⑥ هر مجموعه را با حروف بزرگ نام‌گذاری می‌کنند.

### عضوهای مجموعه

عضوهای یک مجموعه را در یک آکولاد نوشته و بین آن‌ها علامت کاما (,) می‌گذاریم. تعداد اعضای مجموعه یا عدد اصلی مجموعه، پس از حذف کردن عضوهای تکراری به دست می‌آید. تعداد اعضای مجموعه‌ای مانند  $A$  را با نماد  $n(A)$  نشان می‌دهیم و به آن عدد اصلی مجموعه  $A$  می‌گوییم:

$n(A)$  «عدد اصلی مجموعه» یا «تعداد عضوهای مجموعه  $A$ »

$$B = \{2, 5, x, y, z\} \Rightarrow n(B) = 5$$

$$F = \{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\} \Rightarrow F = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(F) = 3$$

برای نشان دادن عضو بودن یا عضو نبودن چیزی در یک مجموعه، به ترتیب از علامت‌های  $\in$  یا  $\notin$  استفاده می‌کنیم:

$$C = \{1, 2, 4, 8, 12\} \Rightarrow 1 \in C, 9 \notin C$$

در مجموعه  $C$  می‌گوییم «۱۲ عضو مجموعه  $C$  است»، چون دقیقاً ۱۲ در آن دیده می‌شود (بدون اضافه و کم) و می‌نویسیم:  $12 \in C$ . اما دقت کنید

که در داخل مجموعه  $C$ ،  $\{12\}$  دیده نمی‌شود و باید بنویسیم:

حال با توجه به مجموعه  $D = \{a, \{b\}, \{c, f\}\}$  می‌توان نوشت:

$$a \in D, \{b\} \in D, b \notin D, \{c, f\} \in D, \{c\} \notin D, c \notin D, \{f\} \notin D, f \notin D$$

در مجموعه  $D$ ، عبارت « $b$  عضو مجموعه  $D$  است». نادرست است، چون حرف  $b$  نیست که عضو  $D$  است بلکه مجموعهٔ حرف  $b$  یا  $\{b\}$  عضو  $D$  است.

**مثال:** تعداد عضوهای مجموعه‌های داده‌شده را به دست آورید.

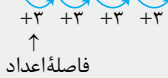
الف)  $E = \{5, 8, 11, 14, \dots, 104\}$

ب)  $X = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$

پ)  $L = \{x, \{x\}, \{x, x\}\}$

$E = \{5, 8, 11, 14, 17, \dots, 104\}$

**پاسخ:** الف) در مجموعه E فاصله هر دو عضو پشت سر هم سه واحد است:



تعداد اعداد چنین الگویی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(E) = 34 \Rightarrow 1 + 1 = \frac{99}{3} + 1 = 33 + 1 = 34 \Rightarrow n(E) = 34$$

عدد کوچک‌تر - عدد بزرگ‌تر  
فاصله اعداد

ب) در مجموعه X عضوهای 1 و {1} با هم مساوی نیستند. عضو 1، فقط عدد 1 و عضو {1}، مجموعه عدد 1 است و با هم یکسان نیستند. در ادامه

عضوهای مجموعه X نشان داده شده‌اند:  $X = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\} \Rightarrow n(X) = 4$

پ) در شمارش عضوهای مجموعه، باید عضو تکراری را حذف کرد. ابتدا در {x, x} یکی از xها حذف می‌شود. سپس در مجموعه L، یکی از {x}ها هم

حذف می‌شود:  $L = \{x, \{x\}, \{x, x\}\} = \{x, \{x\}, \{x\}\} = \{x, \{x\}\} \Rightarrow n(L) = 2, x \in L, \{x\} \in L$

### مجموعه تهی

$\emptyset = \{ \}$

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعه تهی است. مجموعه تهی را به دو شکل  $\{ \}$  یا  $\emptyset$  نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم.

**دقت کنید!!!** برای کار با مجموعه‌ها به مجموعه تهی بسیار نیازمندیم. از تعریف آن تعجب نکنید.

**تست:** کدام مجموعه تهی نیست؟

(۲) مجموعه شمارنده‌های زوج عدد ۷

(۱) مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از صفر

(۴) شمارنده‌های ضرب ۳ عدد ۱۲۵

(۳) مجموعه‌ای شامل شمارنده همه عددهای طبیعی

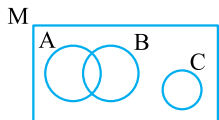
**پاسخ:** شمارنده همه عددهای طبیعی، عدد یک است و مجموعه گزینه (۳) برابر {1} است. گزینه (۱) تهی است، چون همه عددهای طبیعی، بزرگ‌تر از صفر

هستند. گزینه (۲) تهی است چون عدد ۷ شمارنده زوج ندارد و گزینه (۴) تهی است چون شمارنده‌های طبیعی {1, 5, 25, 125} هستند.

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

### مجموعه مرجع

بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که در یک سؤال مورد بحث قرار می‌گیرد، مجموعه مرجع است. به طور مثال، مجموعه مرجع



می‌تواند مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما، مجموعه افراد خانواده و دوستان، مجموعه همه مثلث‌ها، مجموعه اعداد

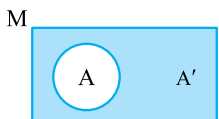
طبیعی و ... یا مجموعه {1, 2, 3, 4, 5} باشد.

مجموعه مرجع را معمولاً با حرف M نشان می‌دهند و در نمودار ون با مستطیل نشان داده می‌شود.

### متمم یک مجموعه

متمم یک مجموعه مانند A، مجموعه‌ای است که هیچ عضوی از اعضای A را ندارد اما هر آن‌چه عضو A نیست را در خود دارد. پس می‌توان نوشت:

$$x \in A \Rightarrow x \notin A' \quad , \quad y \notin A \Rightarrow y \in A'$$



متمم هر مجموعه مانند A را با A' نمایش می‌دهیم.

**دقت کنید!!!** برای تعریف متمم یک مجموعه در یک مسئله، حتماً مجموعه مرجع باید معین شده باشد. در غیر این

صورت مجموعه A'، منحصر به فرد نخواهد بود.

$A' = \{3, 7, 9\}$

به طور مثال:  $A = \{1, 5, 11\}$ ,  $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ، در نتیجه:

سه نکته زیر را به دقت بخوانید:

$$(A')' = A$$

• متمم متمم هر مجموعه برابر خود آن مجموعه است.

$$M' = \emptyset, \emptyset' = M$$

• متمم مجموعه مرجع، مجموعه تهی و متمم مجموعه تهی، مجموعه مرجع می شود.

$$n(A) + n(A') = n(M)$$

• حاصل جمع تعداد اعضای مجموعه A و تعداد اعضای A'، برابر اعضای مجموعه مرجع است.



## مجموعه‌های مساوی

دو مجموعه A و B به شرطی مساوی هستند که:

① تعداد اعضای آن‌ها مساوی باشد، یعنی:  $n(A) = n(B)$       ② تک تک اعضای مجموعه A در مجموعه B وجود داشته باشد و برعکس.

$$A = \{x^2, -5\}$$

$$B = \{-y, 121, y-10\}$$

**مثال:** دو مجموعه A و B مساوی هستند.  $x+y$  چه قدر است؟

**پاسخ:** مجموعه B با سه عضو و مجموعه A با دو عضو نشان داده شده است. برای مساوی بودن مجموعه‌ها باید دو عضو از مجموعه B با هم مساوی شوند که سه حالت برای این تساوی وجود دارد:

$-y = 121 \Rightarrow y = -121 \Rightarrow y - 10 = -121 - 10 = -131 \Rightarrow B = \{-131, 121\}$

مجموعه B دو عضوی می‌شود، اما نمی‌تواند با مجموعه A مساوی شود و این تساوی نباید در نظر گرفته شود.

$$121 = y - 10 \Rightarrow 121 + 10 = y \Rightarrow 131 = y \Rightarrow -y = -131 \Rightarrow B = \{-131, 121\}$$

که در این حالت نیز مجموعه B نمی‌تواند با مجموعه A برابر شود.

$$-y = y - 10 \Rightarrow 10 = y + y \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow -y = -5 \Rightarrow B = \{-5, 121\}$$

$$A = B \Rightarrow \{x^2, -5\} = \{-5, 121\} \Rightarrow -5 = -5, x^2 = 121 \Rightarrow x = +11 \text{ یا } -11 \Rightarrow x + y = \begin{cases} 11 + 5 = 16 \\ -11 + 5 = -6 \end{cases}$$

دقت کنید که  $x^2$  نمی‌تواند مساوی (-5) باشد.

## مجموعه متناهی و مجموعه نامتناهی

اگر مجموعه‌ای تهی باشد یا تعداد عضوهای آن محدود باشد، می‌گوییم آن مجموعه متناهی است. مجموعه‌های زیر همگی متناهی هستند.

$$A = \emptyset, B = \{1, 2\}, C = \{5, 10, 15, 20, \dots, 1000\}$$

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی است. یعنی اگر تعداد عضوهای یک مجموعه بی‌شمار باشد، می‌گوییم آن مجموعه نامتناهی است؛ مانند

مجموعه‌های روبه‌رو:  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  = مجموعه عددهای گویا       $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  = مجموعه عددهای طبیعی

**دقت کنید!!!** مجموعه متناهی به معنای مجموعه با پایان یا با ابتدای معین نیست و تعداد اعضا باید محدود باشد. به طور مثال مجموعه عددهای گویای بین صفر و ۲ هم آغاز و هم پایان معلوم دارد اما بی‌شمار عضو دارد و یک مجموعه نامتناهی است.

## بسته بودن مجموعه نسبت به یک عمل ریاضی

می‌گوییم مجموعه عددهای طبیعی ( $\mathbb{N}$ ) نسبت به عمل جمع، بسته است؛ یعنی اگر هر دو عدد دلخواه (حتی تکراری) از مجموعه  $\mathbb{N}$  انتخاب کنیم و آن‌ها را با هم جمع کنیم، حاصل جمع آن‌ها نیز عضو مجموعه اعداد طبیعی است. چون حاصل جمع هر دو عدد طبیعی دلخواه، عددی طبیعی خواهد بود.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$1 \in \mathbb{N}, 5 \in \mathbb{N}, (5+1) = 6 \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$  نسبت به جمع بسته است.  $\Rightarrow (x+y) \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ : همیشه

$$2 \in \mathbb{N}, 6 \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{اما}} (2-6) = -4 \notin \mathbb{N}$$

اما مجموعه  $\mathbb{N}$  نسبت به عمل تفریق بسته نیست؛ چون:

بسته بودن یا نبودن یک مجموعه را نسبت به هر عمل دلخواه ریاضی می‌توان مانند بالا بررسی کرد. مجموعه عددهای طبیعی ( $\mathbb{N}$ ) نسبت به عمل

ضرب، بسته است و نسبت به عمل تقسیم بسته نیست.

**تست:** کدام عبارت در مورد مجموعه عددهای گویا درست نیست؟

- (۱) نسب به عمل جمع بسته است.  
 (۲) نسبت به عمل ضرب بسته است.  
 (۳) نسبت به عمل تقسیم بسته است.  
 (۴) مجموعه عددهای گویا نامتناهی است.

**پاسخ:** گزینه‌های (۱) و (۲) حتماً درست هستند. چون حاصل جمع هر دو عدد گویا، همواره عددی گویا است و همچنین حاصل ضرب هر دو عدد گویا، حتماً عددی گویا است.

گزینه (۴) درست است، مجموعه عددهای گویا نامتناهی است و بی‌شمار عضو دارد.  
 گزینه (۳) نادرست است. چون اگر دو عدد ۵ و صفر را انتخاب کنیم، نمی‌توان عدد ۵ را بر صفر تقسیم کرد و  $\frac{5}{0}$  تعریف نشده است. پس مجموعه عددهای گویا نسبت به عمل تقسیم بسته نیست.  
 بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

**نمایش مجموعه‌ها به زبان ریاضی**

با توجه به نوع مجموعه‌ای که درباره آن صحبت می‌کنیم، می‌توان آن را با نمادهای گوناگون نشان داد. به طور مثال، مجموعه عددهای گویا را نمی‌توان با نوشتن اعضا یا نمودار ون نمایش داد و باید از زبان ریاضی استفاده کرد.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

قبل از صحبت جدی درباره نمایش مجموعه‌ها به زبان ریاضی، مجموعه اعداد را مرور می‌کنیم:

مجموعه اعداد طبیعی =  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  (Natural)

مجموعه اعداد حسابی =  $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  (Whole)

مجموعه اعداد صحیح =  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  (Zahlen)

مجموعه اعداد طبیعی زوج =  $E = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$  (Even)

مجموعه اعداد طبیعی فرد =  $O = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$  (Odd)

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \bigcirc \quad | \quad \square \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{شکل عضو} \quad \text{بخش شرط} \end{array} \right\}$$

نمایش مجموعه به زبان ریاضی را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد:

ابتدا در هر مسئله سراغ «بخش شرط» رفته و آن را بررسی می‌کنیم، سپس نتایج به دست آمده را در بخش «شکل عضو» جای‌گذاری می‌کنیم تا اعضای مجموعه به دست آید.

به طور مثال:  

$$A = \left\{ \underbrace{x^2 + 5}_{\text{شکل عضو}} \mid \underbrace{x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 4}_{\text{شرط}} \right\}$$

ابتدا به بخش شرط یعنی  $(x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 4)$  بپردازیم. نتیجه می‌گیریم  $x$  می‌تواند عددهای  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$  باشد.

حالا این مقادیر را تک‌تک به جای  $x$ ، در عبارت  $(x^2 + 5)$  قرار می‌دهیم تا اعضا ساخته شوند. همه اعضا به شکل  $(x^2 + 5)$  خواهند بود.

$$A = \{(-3)^2 + 5, (-2)^2 + 5, (-1)^2 + 5, (0)^2 + 5, (1)^2 + 5, (2)^2 + 5, (3)^2 + 5, (4)^2 + 5\}$$

$$A = \{14, 9, 6, 5, 6, 9, 14, 21\}$$

$\Rightarrow A = \{5, 6, 9, 14, 21\} \Rightarrow n(A) = 5$

یک نکته مهم در این مسئله وجود دارد. تعداد عددهای به دست آمده در بخش شرط (منظور  $x$ های به دست آمده است.) با تعداد عضوهای نهایی مجموعه مساوی نیست. پس:

**دقت کنید!!!** برای به دست آوردن تعداد عضوهای مجموعه، باید تعداد اعضای نهایی را بشمارید و نه تعداد عددهای به دست آمده از بخش شرط. چون ممکن است برابر نباشند.

**مثال:** با توجه به نمایش ریاضی مجموعه‌ها، اعضای آن‌ها را بنویسید.

الف)  $A = \{1 \cdot x + 3 \mid x \in \mathbb{N}, -6 \leq x < 4\}$

ب)  $B = \{n(n-1) \mid n \in \mathbb{Z}, n^2 < 16\}$

پ)  $C = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}\}$

ت)  $D = \{n-4 \mid \frac{2^0}{n} \in \mathbb{Z}\}$

ث)  $E = \{x-y \mid x, y \in \mathbb{N}, x+y=5\}$

**پاسخ:**

الف)  $A = \{1 \cdot x + 3 \mid x \in \mathbb{N}, -6 \leq x < 4\}$

$-6 \leq x < 4 \Rightarrow x = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

اما  $x \in \mathbb{N} \Rightarrow$  صفر و عددهای منفی حذف می‌شوند  $\Rightarrow x = 1, 2, 3 \Rightarrow A = \{1 \cdot 0 + 3, 1 \cdot 1 + 3, 1 \cdot 2 + 3, 1 \cdot 3 + 3\} \Rightarrow A = \{3, 4, 5, 6\}$

ب)  $B = \{n(n-1) \mid n \in \mathbb{Z}, n^2 < 16\}$

$n^2 < 16, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$\Rightarrow B = \{-3(-3-1), -2(-2-1), -1(-1-1), 0(0-1), 1(1-1), 2(2-1), 3(3-1)\} \Rightarrow B = \{12, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 12\}$

عضو تکراری حذف شد  $\rightarrow B = \{12, 6, 2, 0\}$

پ)  $C = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}\}$

$\sqrt{-x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \\ (-x) \text{ مربع کامل است} \end{cases} \Rightarrow x = 0, -1, -4, -9, -16, \dots \Rightarrow C = \{0^2, (-1)^2, (-2)^2, (-3)^2, \dots\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

ت)  $D = \{n-4 \mid \frac{2^0}{n} \in \mathbb{Z}\}$

$\frac{2^0}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  شمارنده صحیح عدد  $2^0$  است  $\Rightarrow n = 1, 2, 4, 5, 10, 20, -1, -2, -4, -5, -10, -20$

برای نوشتن اعضای D، از همه عددهای بالا، 4 واحد کم می‌کنیم:

$\Rightarrow D = \{(1-4), (2-4), (4-4), (5-4), (10-4), (20-4), (-1-4), (-2-4), (-4-4), (-5-4), (-10-4), (-20-4)\}$

$\Rightarrow D = \{-3, -2, 0, 1, 6, 16, -5, -6, -8, -9, -14, -24\}$

ث)  $E = \{x-y \mid x, y \in \mathbb{N}, x+y=5\}$

$x, y \in \mathbb{N}, x+y=5 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow E = \{(1-4), (2-3), (3-2), (4-1)\} \Rightarrow E = \{-3, -1, 1, 3\}$

**مثال:** مجموعه‌های داده‌شده را به زبان ریاضی بنویسید.

الف)  $M = \{-8, -7, -6, -5, \dots, 99\}$

ب)  $N = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, \dots, 51\}$

پ)  $P = \{0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \dots\}$

ت)  $S = \{-1, 2, -3, 4, -5, \dots, 200\}$

ث)  $T = \{\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \dots\}$

$M = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -8 \leq x \leq 99\}$

**پاسخ:** الف) عددهای متوالی و صحیح از -8 تا 99.

ب) عددهای داده‌شده 5 تا 5 اضافه شده‌اند، پس حتماً به شکل  $(5x + ?)$  خواهند بود. کافی است  $x$  را 1 قرار داده و مقدار  $(5x + ?)$  را مساوی

$5 \times 1 + ? = 1 \Rightarrow ? = (-4)$

اولین عدد مجموعه قرار داده و ؟ را محاسبه کنیم:

برای آن که بدانیم  $x$  از 1 تا چه عددی خواهد بود، معادله  $5x - 4 = 51$  را حل می‌کنیم که  $x$  برابر 11 شده و در نتیجه  $1 \leq x \leq 11$  خواهد بود.

$\Rightarrow N = \{5x - 4 \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 11\}$

$\{0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \dots\}$

پ) فاصله عددها را به دست بیاوریم:

$+3 \quad +5 \quad +7 \quad +9 \quad +11 \quad +13$

**دقت کنید!!!** چون فاصله اعداد، عددهای فرد متوالی است، حتماً در زبان ریاضی و در بخش شکل عضو، جمله  $x^2$  دیده می‌شود. اگر به عددهای

$P = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

مجموعه یک واحد اضافه کنیم، همگی مربع کامل می‌شوند. پس شکل عضو  $(x^2 - 1)$  است.

ت) عددهای مجموعه، یکی در میان تغییر علامت می‌دهند، پس عبارتی مانند  $(-1)^n$  در آن دیده می‌شود. به غیر از علامت، عددهای طبیعی متوالی

$S = \{(-1)^n \times n \mid n \in \mathbb{N}, n < 201\}$

دیده می‌شود:

ث) در هر کسر، صورت یک واحد از مخرج کوچک‌تر است. یعنی همه کسرها به شکل  $\frac{n-1}{n}$  هستند و برای به دست آوردن اولین مقدار  $n$

$T = \{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 4\}$

$n = 4$  و  $\frac{n-1}{n} = \frac{3}{4}$  می‌شود.



**دقت کنید!!!** تبدیل نمایش ریاضی به نمایش با اعضا همیشه منحصر به فرد است، اما نمایش با اعضای یک مجموعه را می توان به بی شمار حالت مختلف زبان ریاضی نوشت. مانند:

$$A = \{7, 8, 9, 10, 11\} \Rightarrow \begin{cases} A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 6 < x < 12\} \\ A = \{x+1 \mid x \in \mathbb{N}, 6 \leq x \leq 10\} \\ A = \{-x \mid x \in \mathbb{Z}, -11 \leq x \leq -7\} \end{cases}$$

**تست:** کدام گزینه مجموعه  $G = \left\{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times n^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$  را درست نشان می دهد؟

- (۱)  $\{-1, -2, 3, 4, -5, -6, \dots\}$   
 (۲)  $\{-1, 4, -9, 16, 25, -36, \dots\}$   
 (۳)  $\{1, 4, -9, -16, 25, 36, \dots\}$   
 (۴)  $\{-1, -4, 9, 16, -25, -36, \dots\}$

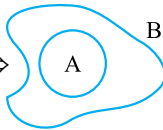
**پاسخ:** به جای  $n$  به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ... قرار می دهیم:

$n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{1(1+1)}{2} = 1$	$\frac{2(2+1)}{2} = 3$	$\frac{3(3+1)}{2} = 6$	$\frac{4(4+1)}{2} = 10$	$\frac{5(5+1)}{2} = 15$	$\frac{6(6+1)}{2} = 21$
$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$	$(-1)^1 = -$	$(-1)^3 = -$	$(-1)^6 = +$	$(-1)^{10} = +$	$(-1)^{15} = -$	$(-1)^{21} = -$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.  $n^2 = 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots = 1, 4, 9, 16, 25, \dots \Rightarrow G = \{-1, -4, 9, 16, -25, -36, \dots\}$

### زیرمجموعه

مجموعه  $A$  زیرمجموعه ای از مجموعه  $B$  است، به شرطی که همه اعضا  $A$  در مجموعه  $B$  یافت شود. عبارت «مجموعه  $A$  زیرمجموعه، مجموعه  $B$  است.» را به صورت  $A \subseteq B$  نشان می دهیم و  $C \not\subseteq D$  یعنی  $C$  زیرمجموعه  $D$  نیست.



نکات زیر را با دقت در مورد زیرمجموعه ها بخوانید:

- مجموعه تهی، زیرمجموعه همه مجموعه ها است.
- در هر مسئله، همه مجموعه ها، زیرمجموعه مجموعه مرجع هستند.
- هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است.  $A \subseteq A, \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$
- اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$ ، آن گاه:  $A \subseteq C$
- اگر بدانیم  $A \subseteq B$ ، آن گاه:  $n(A) \leq n(B)$
- اگر  $A \subseteq B$ ، آن گاه:  $B' \subseteq A'$

**مثال:** زیرمجموعه های مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  را بنویسید.

**پاسخ:** اولین زیرمجموعه از هر مجموعه، زیرمجموعه تهی ( $\emptyset$  یا  $\{\}$ ) است. سپس زیرمجموعه های  $B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$  یک عضوی، سپس دو عضوی، سپس سه عضوی و ... نوشته می شوند.  
 $\{1, 2\}, \{2, 3\}$   
 $\{1, 2, 3\}$

**دقت کنید!!!** در مجموعه ای مانند بالا، نمی توان نوشت  $1 \subseteq B$ . چون ۱ یا ۲ یا ۳ به تنهایی مجموعه نیستند و عضوهای مجموعه  $B$  می باشند و حتماً باید آن ها را داخل آکولاد قرار داد تا به عنوان مجموعه شناخته شوند؛ پس می توان نوشت:  $B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow 1 \in B, \{\} \subseteq B$

**مثال:** زیرمجموعه های مجموعه  $A = \{1, \{1\}\}$  را بنویسید.

**پاسخ:** برای نوشتن زیرمجموعه ها از تهی آغاز کرده و سپس با یک عضوی ها، دو عضوی ها و سه عضوی ها تا خود مجموعه ادامه می دهیم:  
 $\Rightarrow \emptyset, \{\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}$   
 همان طور که می بینید چون  $1 \in A$  و هم چنین  $\{1\} \in A$  هستند، به ترتیب با قراردادن عضوهای ۱ و  $\{1\}$  درون آکولاد، زیرمجموعه های  $\{1\}$  و  $\{1, \{1\}\}$  ساخته می شوند؛ یا به عبارتی:  
 $1 \in A \Rightarrow \{1\} \subseteq A, \{1, \{1\}\} \in A \Rightarrow \{\{1, \{1\}\}\} \subseteq A$

### تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه وابسته به تعداد اعضای مجموعه یا عدد اصلی مجموعه است. اگر تعداد عضوهای یک مجموعه  $n$  باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر  $2^n$  است. چرا؟

کلمه (چرا؟) از مهم‌ترین کلمه‌های زندگی است. از این کلمه زیاد استفاده کنید و به طور ویژه و در هنگام مطالعه، از خودتان، زیاد سؤال بپرسید. ابتدا سعی کنید تا خودتان پاسخ چرهایتان را بدهید. اگر نشد! ترسی نیست! از معلم، از دوست یا افراد دیگر کمک بگیرید. مطمئن باشید همین سؤال درون ذهن شما، هنوز به ذهن خیلی‌ها خطور نکرده و شما حتی با یک سؤال، از خیلی‌ها جلوتر هستید؛ اما چرا تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضو،  $2^n$  است؟

بیا باید مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  را در نظر بگیریم. فرض کنیم شما از من می‌خواهید که یک زیرمجموعه دلخواه از  $A$  را بسازم. خوب، من به عضوهای مجموعه  $A$  نگاه می‌کنم و با خود می‌گویم  $a$  باشد،  $b$  باشد،  $c$  نباشد،  $d$  باشد،  $e$  نباشد و زیرمجموعه  $\{a, b, d\}$  ساخته می‌شود. پس من برای هر عضو دو حالت می‌توانستم در نظر بگیرم: «هر عضو باشد یا نباشد». پس برای ساختن زیرمجموعه‌های هر مجموعه، هر عضو دو حالت برای خود دارد، می‌تواند در زیرمجموعه باشد یا می‌تواند نباشد. پس تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با:  $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{2^n} = 2^n$

**مثال:** تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۹ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۶ عضوی است؟

$$\frac{2^9}{2^6} = 2^{9-6} = 2^3 = 8$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۹ عضوی  $= 2^9$       تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی  $= 2^6$

**پاسخ:**

**مثال:** تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $(k+2)$  عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $(k-2)$  عضوی،  $60$  تا بیشتر است.  $k$  چه قدر است؟

$$60 = \text{تعداد زیرمجموعه‌های } (k-2) \text{ عضوی} - \text{تعداد زیرمجموعه‌های } (k+2) \text{ عضوی}$$

**پاسخ:**

$$2^{k-2} - 2^{k+2} = 60 \xrightarrow{\text{فکتورگیری}} 2^{k-2}(2^4 - 1) = 60 \Rightarrow 2^{k-2}(16 - 1) = 60 \Rightarrow 2^{k-2} \times 15 = 60 \Rightarrow 2^{k-2} = 4 \Rightarrow 2^{k-2} = 2^2 \Rightarrow k-2 = 2 \Rightarrow k = 4$$

**تست:** مجموعه  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}$  چند زیرمجموعه دارد؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲۸ (۱)

**پاسخ:** برای به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌ها، ابتدا باید عدد اصلی مجموعه را به دست آورد؛ پس ابتدا عضوهای تکراری حذف می‌شوند.

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\} \Rightarrow A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\} \Rightarrow A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^2 = 4$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

### تعداد زیرمجموعه‌های $m$ عضوی از یک مجموعه $n$ عضوی

تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی، همیشه برابر  $n$  است.

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی، همیشه برابر  $\frac{n(n-1)}{2 \times 1}$  است.

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی، همیشه برابر  $\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$  است.

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی، همیشه برابر  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$  است.

و می‌توانید همین الگو را ادامه دهید.



**مثال:** تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی، ۲ عضوی و ۳ عضوی یک مجموعه ۶ عضوی را به دست آورید.

**پاسخ:** از رابطه‌های صفحه قبل استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} n=6 = \text{تعداد زیرمجموعه ۱ عضوی} \\ \text{تعداد زیرمجموعه ۲ عضوی} = \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = \frac{6 \times (6-1)}{2} = 15 \\ \text{تعداد زیرمجموعه ۳ عضوی} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = \frac{6(6-1)(6-2)}{6} = 20 \end{cases}$$

**دقت کنید!!!** در هر مجموعه  $n$  عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های  $m$  عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های  $(n-m)$  عضوی برابر است.

به طور مثال در یک مجموعه ۷ عضوی:

تعداد زیرمجموعه ۱ عضوی = تعداد زیرمجموعه  $(7-1) = 6$  عضوی

تعداد زیرمجموعه ۲ عضوی = تعداد زیرمجموعه  $(7-2) = 5$  عضوی

تعداد زیرمجموعه ۳ عضوی = تعداد زیرمجموعه  $(7-3) = 4$  عضوی

چرا؟ چون ساختن یک مجموعه ۱ عضوی از یک مجموعه ۷ عضوی، شبیه ساختن یک زیرمجموعه ۶ عضوی از همان مجموعه است. در زیرمجموعه

یک عضو، یک عضو را برمی‌داریم اما در زیرمجموعه ۶ عضوی، همان عضو را بر نمی‌داریم.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

۱) را بر نداشتیم  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و ۱) را برداشتیم  $\{1\}$

۲) را برداشتیم  $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و ۲) را برداشتیم  $\{2\}$

و به همین ترتیب می‌توان ادامه داد.

**مثال:** یک مجموعه ۱۰ عضوی چند زیرمجموعه ۸ عضوی دارد؟

**پاسخ:** می‌دانیم تعداد زیرمجموعه ۸ عضوی از یک مجموعه ۱۰ عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های  $(10-8)$  عضوی، یعنی ۲ عضوی برابر است. پس

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی را پیدا می‌کنیم.  $\text{تعداد زیرمجموعه ۲ عضوی} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = \frac{90}{2} = 45$

**تست:** مجموعه‌ای دارای ۳۶ زیرمجموعه ۲ عضوی است. این مجموعه در کل چند زیرمجموعه دارد؟

- ۵۱۲ (۱)      ۱۰۲۴ (۲)      ۲۵۶ (۳)      ۲۰۴۸ (۴)

**پاسخ:** از رابطه  $\frac{n(n-1)}{2} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی}$ ، استفاده می‌کنیم:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n(n-1) = 36 \times 2 \Rightarrow n(n-1) = 72 = 9 \times 8 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.  $\text{تعداد کل زیرمجموعه‌ها} = 2^n = 2^9 = 512$

### زیرمجموعه‌های محض

همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه به غیر از خود آن مجموعه، زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه هستند. پس تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه  $n$  عضوی برابر  $(2^n - 1)$  است.

**تست:** اگر بدانیم  $\{2, 5\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، چند مجموعه متفاوت به جای  $A$  می‌توان نوشت؟

- ۸ (۱)      ۱۶ (۲)      ۳۲ (۳)      ۶۴ (۴)

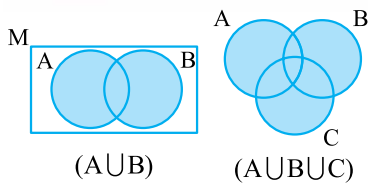
**پاسخ:**  $\{2, 5\}$  زیرمجموعه  $A$  است. یعنی مجموعه  $A$  حتماً عضوهای ۲ و ۵ را دارد.  $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، یعنی این که  $A$  می‌تواند عضوهای ۱، ۳، ۴، ۶ را داشته باشد یا نداشته باشد. هر کدام از این چهار عضو دو حالت دارند، پس تعداد حالت‌های ممکن برای مجموعه  $A$ ،  $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  می‌باشد.

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

### اعمال روی مجموعه‌ها

در این جا اعمالی مانند اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها و متمم آن‌ها را معرفی و بررسی می‌کنیم. با کنار هم قراردادن این اعمال و مجموعه‌ها، «جبر مجموعه» به وجود می‌آید.

## اجتماع مجموعه‌ها



اجتماع مجموعه‌های A و B، مجموعه‌ای است که همهٔ عضوهای A و همهٔ عضوهای B را در خود دارد. در اجتماع مجموعه‌ها نیز عضوهای تکراری حذف می‌شوند. اجتماع مجموعه‌های A و B در نمودار ون، اجتماع مجموعه‌ها را مانند شکل نشان می‌دهیم و تمام سطح مجموعه‌ها رنگ می‌شود.

$$A \cup B = B \cup A$$

در اجتماع مجموعه‌ها می‌توان، مجموعه‌ها را جابه‌جا یا دسته‌بندی کرد. به طور مثال:

$$A \cup B \cup C \cup D = (A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \cup C) \cup (B \cup D) = (A \cup D) \cup (B \cup C)$$

**تست:** اگر  $A = \{1, x, 5, y\}$  و  $B = \{3, 4, z\}$  و  $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$ . اگر  $x \neq y \neq z$  باشند،  $(x-y)^z$  چه قدر است؟

$(n(A) = 4, n(B) = 3)$        $-1 (4)$        $1 (3)$        $-2 (2)$        $-1 (1)$

**پاسخ:**

$$A \cup B = \underbrace{\{1, x, 5, y\}}_A \cup \underbrace{\{3, 4, z\}}_B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$$

چون  $n(B) = 3$  نمی‌تواند مساوی 3 یا 4 باشد. چون هر سه، عضوهای متفاوت B هستند. همچنین چون  $n(A) = 4$ ،  $x$  و  $y$  نیز نمی‌توانند 1 یا 5 باشند، چون عضو A هستند. چون مجموعهٔ چپ 7 عضو و مجموعهٔ راست 5 عضو دارند، حتماً دو عضو مجموعهٔ سمت چپ تکراری خواهند بود، پس

$$x = 3, y = 4, z = 8 \Rightarrow (x - y)^z = (3 - 4)^8 = (-1)^8 = 1$$

X و Y می‌توانند مساوی 3 و 4 باشند و Z مساوی 8 خواهد بود.

$$x = 4, y = 3, z = 8 \Rightarrow (x - y)^z = (4 - 3)^8 = (1)^8 = 1$$

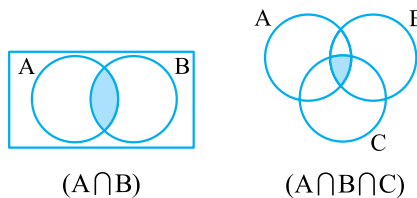
بنابراین گزینه (3) صحیح است.

## اشتراک مجموعه‌ها

اشتراک مجموعه‌های A و B، مجموعه‌ای است که فقط عضوهای مشترک مجموعه‌های A و B، در آن وجود دارد.

$$A \cap B = \text{اشتراک مجموعه‌های A و B}$$

$$a \in A, a \in B \Rightarrow a \in (A \cap B)$$



$$A \cap B = B \cap A$$

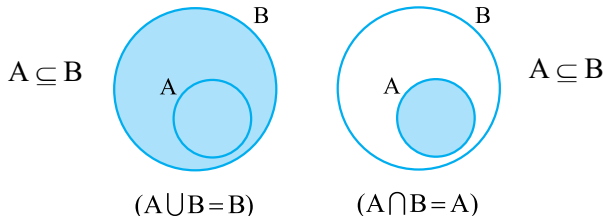
در اشتراک مجموعه‌ها می‌توان مجموعه‌ها را جابه‌جا کرد:

$$A \cap B \cap C \cap D = (A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D) = (A \cap D) \cap (B \cap C)$$

**چند نکته دربارهٔ اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها**

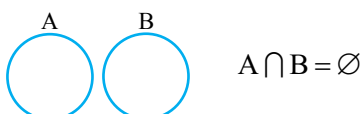
$$A \cup B = A = B, \quad A \cap B = A = B$$

اگر  $A = B$  باشد، آن‌گاه:



$$A \cup B = B, \quad A \cap B = A$$

اگر  $A \subseteq B$  باشد، آن‌گاه:



اگر  $A \cap B = \emptyset$ ، می‌گوییم دو مجموعهٔ جدا از هم هستند، یعنی هیچ عضو مشترکی ندارند.

$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = M$$

برای دو مجموعهٔ A و A' (متمم A) همواره می‌توان نوشت:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

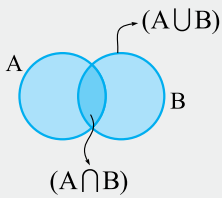
برای هر مجموعهٔ دلخواه A و مجموعهٔ تهی ( $\emptyset$ ) همواره می‌توان نوشت:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

$$A \cup M = M, \quad A \cap M = A$$

و برای هر مجموعهٔ دلخواه A می‌توان نوشت:

**مثال:** با نمودار ون نشان دهید:  $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$



**پاسخ:** دو مجموعه دلخواه می کشیم، به طوری که ناحیه مشترک داشته باشند.  $(A \cap B)$  ناحیه مشترک و تیره تر و  $(A \cup B)$  کل سطح  $A$  و  $B$  است و در نتیجه:

$$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$$

**تست:** اگر  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq X, F, P$ ، حاصل  $(A \cap B) \cap (X \cup F \cup A \cup P)$  کدام گزینه است؟

- (۱)  $A$       (۲)  $B$       (۳)  $A \cup B$       (۴)  $(X \cup F \cup P)$

**پاسخ:** چون  $B \subseteq A$  است، حاصل  $(A \cap B)$ ، برابر  $B$  می شود.

$$\Rightarrow (A \cap B) \cap (X \cup F \cup A \cup P) = B \cap (A \cup (X \cup F \cup P)) = B \cap (A \cup D)$$

$$B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq (A \cup D) \Rightarrow B \cap (A \cup D) = B \quad \text{D}$$

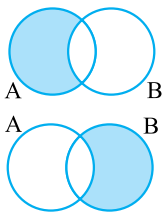
**دقت کنید!!!** اگر  $A \subseteq B$  باشد، مجموعه  $A$  زیرمجموعه حاصل اجتماع  $B$  با هر مجموعه دلخواه دیگر نیز هست.

$$A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq (B \cup Y) \quad \text{یا} \quad A \subseteq (B \cup (C \cap D)) \quad \dots$$

### تفاضل مجموعه‌ها

تفاضل مجموعه‌ها، مثل تفریق دو عدد نیست و عبارت است از:

برای دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، حاصل  $(A - B)$  مجموعه‌ای است که اعضای آن در  $A$  باشند و در  $B$  نباشند.



$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

و در نتیجه  $B - A$  برابر است با:  $B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$

در تفریق  $A - B$ ، در واقع عضوهای مشترک  $A$  و  $B$  یعنی  $(A \cap B)$ ، از مجموعه  $A$  حذف می شوند و می توان گفت:

$$A - B = A - (A \cap B)$$

**مثال:** اگر  $A = \{a, b, c, d, e\}$  و  $B = \{c, d, e, f, g\}$  و  $C = \{a, e, g\}$ ، آن گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $A - (B \cup C)$

ب)  $B - (C - A)$

الف)  $B \cup C = \underbrace{\{c, d, e, f, g\}}_B \cup \underbrace{\{a, \emptyset, g\}}_C = \{c, d, e, f, g, a\}$

**پاسخ:** ابتدا حاصل داخل پرانتزها را حساب می کنیم:

$A - (B \cup C) = \{a, b, \emptyset, d, \emptyset\} - \{\emptyset, d, \emptyset, f, g, a\} \xrightarrow{\text{عضوهای مشترک از A حذف می شوند}} = \{b\}$

ب)  $C - A = \{a, \emptyset, g\} - \{a, b, c, d, \emptyset\} = \{g\}$

$B - (C - A) = \{c, d, e, f, g\} - \{g\} = \{c, d, e, f\}$

چند نکته دربارهٔ تفاضل مجموعه‌ها:

اگر  $A \subseteq B$  باشد، آن گاه همواره:  $A - B = \emptyset$       اگر  $A \cap B = \emptyset$  باشد، آن گاه همواره:  $A - B = A$ ،  $B - A = B$

همواره:  $(A - B) \subseteq A$

اگر  $n(A) \leq n(B)$  باشد، حتماً نمی توان گفت که  $A - B$  برابر  $\emptyset$  است. مثال:  $A = \{1, 2\}$ ،  $B = \{3, 4, 5\} \Rightarrow A - B = A \neq \emptyset$

$n(A) = 2$        $n(B) = 3$

اگر  $n(A) > n(B)$  باشد، هیچ گاه  $A - B$  برابر  $\emptyset$  نمی شود.

**تست:** حاصل  $(A - B) \cap (B - A)$  چیست؟

- (۱)  $A$       (۲)  $B$       (۳)  $\emptyset$       (۴)  $A \cup B$

**پاسخ:**  $(A - B)$  هیچ عضوی از مجموعه  $B$  ندارد.  $(B - A)$  نیز هیچ عضوی از مجموعه  $A$  ندارد. پس هیچ عضو مشترکی بین  $(A - B)$  و  $(B - A)$  وجود ندارد:

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



- می‌توانیم تفاضل مجموعه‌ها را به اشتراک تبدیل کنیم. علامت تفاضل به اشتراک تبدیل شده و مجموعه بعد آن متمم می‌شود.  $A - B = A \cap B'$
- روابط مقابل همواره درست هستند:  $A - A = \emptyset$
- $A - A' = A$  و  $A' - A = A'$
- $A - \emptyset = A$  و  $\emptyset - A = \emptyset \Rightarrow M - \emptyset = M, \emptyset - M = \emptyset$
- $M - A = A'$  و  $M - A' = A$

**تست:** اگر  $n(A) = 10$  و  $n(B) = 7$  باشد، حداقل و حداکثر تعداد عضوهای مجموعه  $(A - B)$  چه قدر است؟

۱۰ و ۳ (۴)

۷ و ۳ (۳)

۱۰ و ۷ (۲)

۷ و ۵ (۱)

**پاسخ:**  $(A - B)$  وقتی کم‌ترین عضو را دارد که  $B \subseteq A$  باشد. در این حالت  $n(A - B) = 10 - 7 = 3$  می‌شود.  $(A - B)$  وقتی بیشترین عضو را دارد که دو مجموعه جدا از هم باشند و در این حالت  $n(A - B) = 10 - 0 = 10$ . بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

### جبر مجموعه‌ها

به عبارت‌های روبه‌رو نگاه کنید:  $(A \cup B \cup C) - C$  یا  $(X - Y) \cup (Y - X)$  یا  $A \cap ((B \cup C) - A)$   
 به چنین عبارت‌هایی، عبارت‌های جبری مجموعه‌ها می‌گوییم. برای به دست آوردن حاصل این عبارت‌ها می‌توانیم از برخی قوانین استفاده کنیم و پاسخ عبارت‌ها را سریع‌تر و دقیق‌تر به دست آوریم.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

**قوانین دمورگان:** درباره متمم اجتماع و متمم اشتراک مجموعه‌ها است. علامت متمم علاوه بر اثر روی مجموعه‌ها، اشتراک را به اجتماع و اجتماع را به اشتراک تبدیل می‌کند.

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ و } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A' \cup B')' = A \cap B \text{ و } (A' \cap B')' = A \cup B$$

و هم‌چنین:

**مثال:** حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $(A \cup B') \cup (B \cup A')$

ب)  $A \cup (A' \cap B)$

پ)  $A - (B - A)$

**پاسخ:**  $(A \cup B') \cup (B \cup A') \xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} (A \cup A') \cup (B \cup B') \xrightarrow{\text{چون همه علامت‌ها اجتماع است}} A \cup B' \cup B \cup A' = M \cup M = M$

$= M \cup M = M$

ب)  $A \cup (A' \cap B) \xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} \underbrace{(A \cup A')}_M \cap (A \cup B) = A \cup B$

پ)  $A - (B - A) = A - (B \cap A') = A \cap (B \cap A')' \xrightarrow{\text{دمورگان}} A \cap (B' \cup A) \xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} (A \cap B') \cup \underbrace{(A \cap A)}_A = (A \cap B') \cup A \xrightarrow{(A \cap B') \subseteq A} (A \cap B') \cup A = A$

$[A \cup (A \cap B)]' \cap [B \cap (B \cup A)]' \cap [(A \cup A) - A]$

**مثال:** حاصل عبارت مقابل چیست؟

**پاسخ:** ابتدا داخل گروه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$[A \cup (A \cap B)]' \cap [B \cap (B \cup A)]' \cap \underbrace{(A \cup A) - A}_A = [A]' \cap [B]' \cap [A - A] = A' \cap B' \cap \emptyset = \emptyset$$

$(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A$        $B \subseteq (B \cup A) \Rightarrow B \cap (B \cup A) = B$

## عدد اصلی مجموعه در اجتماع، اشتراک و تفاضل

برای محاسبه عدد اصلی مجموعه حاصل از اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌هایی که تعداد عضوهای محدود دارند، از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم.

**عدد اصلی اجتماع دو مجموعه:**

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

در محاسبه تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه، وقتی تعداد اعضای هر دو مجموعه را با هم جمع می‌کنیم  $(n(A) + n(B))$ ، اعضای مشترک دو بار جمع می‌شوند و در نتیجه باید عضوهای بخش مشترک یعنی  $n(A \cap B)$  را یک بار کم کنیم که رابطه بالا دقیقاً همین کار را می‌کند.

**عدد اصلی تفاضل دو مجموعه:**

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

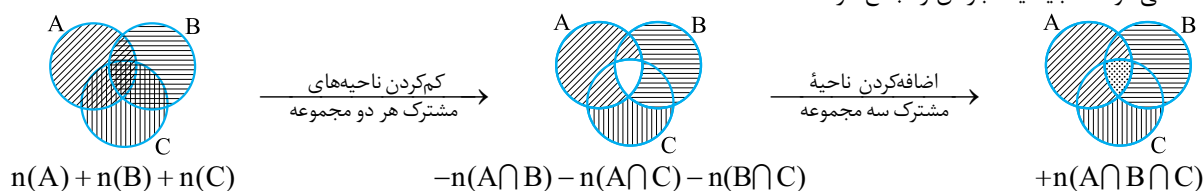
در محاسبه تعداد عضوهای تفاضل دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، یعنی مجموعه  $(A - B)$ ، فقط باید از مجموعه  $A$  عضوهای مشترک با  $B$  را حذف کرد که در رابطه بیان شده دیده می‌شود.

**عدد اصلی اجتماع سه مجموعه:**

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

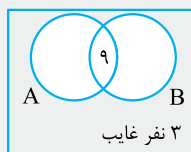
در محاسبه تعداد عضوهای اجتماع سه مجموعه، وقتی تعداد اعضای هر سه مجموعه را با هم جمع می‌کنیم  $(n(A) + n(B) + n(C))$ ، اعضای مشترک هر دو مجموعه، دو بار و اعضای مشترک هر سه مجموعه، سه بار جمع می‌شوند.

(در شکل زیر ناحیه‌هایی که دو بار و سه بار هاشور خورده‌اند). پس از یک بار کم کردن عضوهای مشترک هر دو مجموعه، ناحیه مشترک هر سه مجموعه کاملاً حذف می‌شود که باید یک بار آن را جمع کرد.



**مثال:** در یک کلاس ۲۸ نفره، ۱۹ نفر در درس ریاضی ۲۰ شده‌اند. ۱۵ نفر نیز در درس علوم، نمره ۲۰ گرفته‌اند. ۳ نفر نیز در آزمون‌ها غیبت کرده‌اند.

چند نفر هستند که در این دو درس نمره ۲۰ گرفته‌اند؟ (توجه داشته باشید که هر یک از دانش‌آموزان شرکت‌کننده حداقل در یک درس نمره ۲۰ گرفته‌اند).



**پاسخ:** ۳ نفر اصلاً در آزمون شرکت نکرده‌اند، پس ۲۵ نفر دیگر باقی‌مانده را به دو مجموعه ۲۰های ریاضی (A) و ۲۰های علوم (B) تقسیم می‌کنیم. حالا می‌توانیم از رابطه مقابل استفاده کنیم:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 $25 = 19 + 15 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 34 - 25 = 9$   
 ۹ نفر در هر دو درس ۲۰ شده‌اند.

**مثال:** در بین عددهای ۱ تا ۲۰۰ چند عدد داریم که زوج باشد اما مضرب ۳ نباشد؟

**پاسخ:** مجموعه عددهای زوج و مجموعه عددهای مضرب ۳ در بین ۱ تا ۲۰۰ را به ترتیب X و Y در نظر بگیریم. به شکل زیر دقت کنید، به دنبال

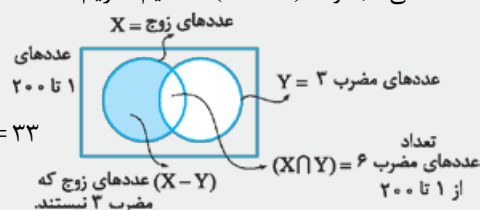
$$n(X - Y) = n(X) - n(X \cap Y)$$

۱۰۰ = خارج قسمت صحیح تقسیم ۲۰۰ بر ۲ =  $n(X)$  = تعداد عددهای زوج ۱ تا ۲۰۰

۶۶ = خارج قسمت صحیح تقسیم ۲۰۰ بر ۳ =  $n(Y)$  = تعداد عددهای مضرب ۳ از ۱ تا ۲۰۰

۳۳ = خارج قسمت صحیح تقسیم ۲۰۰ بر ۶ =  $n(X \cap Y)$  = تعداد عددهای مضرب ۶ از ۱ تا ۲۰۰

$$\Rightarrow n(X - Y) = n(X) - n(X \cap Y) = 100 - 33 = 67$$



**تست:** در یک دهکده افرادی زندگی می‌کنند که ۵۰ نفر آن‌ها کشاورز، ۳۳ نفر دامدار و ۳۷ نفر مغازه‌دار هستند. هم‌چنین می‌دانیم در این دهکده

۱۱ نفر، هم دامدار و هم کشاورز هستند. ۸ نفر کشاورز و مغازه‌دار و ۳ نفر دامدار و مغازه‌دار هستند. تعداد کل افراد دهکده ۱۰۱ نفر است. چند نفر

هستند که فقط یک فعالیت دارند؟

۷۵ (۴)

۸۰ (۳)

۹۰ (۲)

۸۵ (۱)



مغازه‌دارها،  $C$ ، دامدارها،  $B$ ، کشاورزها،  $A$

**پاسخ:** از رابطه عدد اصلی سه مجموعه استفاده می‌کنیم.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$101 = 50 + 33 + 37 - 11 - 8 - 3 + n(A \cap B \cap C)$$

$$101 = 120 - 22 + n(A \cap B \cap C) \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 101 - 120 + 22 = 3$$

تعداد افرادی که هر ۳ فعالیت را انجام می‌دهند، به دست آوردیم؛ اما با توجه به نمودار ون تعداد افراد در ناحیه رنگی را نیاز داریم.

$$n(A \cap B) = 11 = x + 3 \Rightarrow x = 8$$

$$n(A \cap C) = 8 = 3 + z \Rightarrow z = 5$$

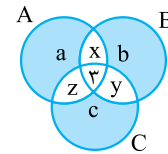
$$n(B \cap C) = 3 = 3 + y \Rightarrow y = 0$$

$$n(A) = 50 = a + x + 3 + z \Rightarrow 50 = a + 8 + 3 + 5 \Rightarrow a = 34$$

$$n(B) = 33 = b + x + 3 + y \Rightarrow 33 = b + 8 + 3 + 0 \Rightarrow b = 22$$

$$n(C) = 37 = c + z + 3 + y \Rightarrow 37 = c + 5 + 3 + 0 \Rightarrow c = 29$$

$$= a + b + c = 34 + 22 + 29 = 85 = \text{تعداد افرادی که فقط یک فعالیت دارند}$$



بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

## مجموعه‌ها و احتمال

یکی از کاربردهای بحث مجموعه‌ها، بررسی احتمال وقوع پدیده‌های تصادفی است. مجموعه‌ها به ما کمک می‌کنند تا بهتر بتوانیم این پدیده‌ها را دسته‌بندی کرده و شمارش کنیم.

### فضای نمونه (کل حالت‌های ممکن)

مجموعه‌ای است که همه حالت‌های ممکن یک پدیده در آن وجود دارد. مجموعه فضای نمونه را با حرف  $S$  نشان می‌دهند. به طور مثال در پرتاب یک سکه

$$S = \{\text{پ}, \text{ر}\} = \{\text{«پشت»}, \text{«رو»}\}$$

در کل، دو حالت پیش می‌آید: ① سکه «رو» بیاید و ② سکه «پشت» بیاید.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

در پرتاب یک تاس معمولی و سالم، مجموعه  $S$  به شکل مقابل است:

**مثال:** در پرتاب هم‌زمان ۳ سکه چند حالت ممکن به وجود می‌آید؟

**پاسخ:** برای نوشتن حالت‌های مختلف می‌توانیم از جدول زیر استفاده کرد:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
سکه اول	ر	پ	ر	ر	پ	پ	ر	پ
سکه دوم	ر	ر	پ	ر	پ	ر	پ	پ
سکه سوم	ر	ر	ر	پ	ر	پ	پ	پ

۸ حالت مختلف می‌توان ساخت.  $\Rightarrow$

$$n(S) = 8 \Rightarrow S = \{(ررر), (ررپ), (رپر), (پرر), (پپپ), (پپر), (پرپ), (پرپ), (پرر), (ررر)\} = \text{مجموعه پرتاب‌های هم‌زمان سه سکه}$$

**دقت کنید!!!** در محاسبه تعداد عضوهای فضای نمونه پرتاب سکه‌ها و تاس‌ها، می‌توان از رابطه‌های زیر استفاده کرد:

- در پرتاب هم‌زمان  $n$  سکه،  $2^n$  حالت مختلف به وجود می‌آید. (چون پرتاب هر سکه ۲ حالت دارد.)
- در  $n$  بار پرتاب یک سکه،  $2^n$  حالت مختلف به وجود می‌آید. (چون هر بار پرتاب ۲ حالت دارد.)
- در پرتاب هم‌زمان  $m$  تاس معمولی،  $6^m$  حالت مختلف به وجود می‌آید. (چون هر تاس ۶ حالت دارد.)
- در  $m$  بار پرتاب یک تاس معمولی،  $6^m$  حالت مختلف به وجود می‌آید. (چون هر پرتاب ۶ حالت دارد.)
- اگر  $n$  سکه و  $m$  تاس را هم‌زمان پرتاب کنیم، در کل  $2^n \times 6^m$  حالت به وجود می‌آید.



## پیشامد تصادفی

هر یک از زیرمجموعه‌های مجموعه فضای نمونه  $(S)$  را می‌توان «پیشامد تصادفی» در نظر گرفت. به طور مثال اگر پرتاب یک تاس را در نظر بگیریم:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 2\} = \text{پیشامد روشن عددی کوچک‌تر از ۳}$$

یا

$$B = \{2, 3, 5\} = \text{پیشامد روشن عددی اول}$$

$$C = \{5\} = \text{پیشامد عددی مضرب ۵}$$

یا

$$D = \{2, 4, 6\} = \text{پیشامد عددی زوج}$$

و می‌توان گفت:  $n(A) = 2, n(B) = 3, n(C) = 1, n(D) = 3$ .

● اگر تعداد عضوهای مجموعه فضای نمونه  $S$  برابر  $n(S)$  باشد، تعداد کل پیشامدهای ممکن برای این مجموعه  $2^{n(S)}$  خواهد بود.

**مثال:** در پرتاب ۲ سکه و یک تاس، موارد زیر را به دست آورید:

الف)  $n(S)$  ب)  $n(A)$  که پیشامد  $A$  برابر حالتی است که عددهای تاس بزرگ‌تر از ۴ باشد.

الف)  $n(S)$

**پاسخ:**

$$n(S) = 2^2 \times 6 = 24 \Rightarrow \text{دو سکه و یک تاس الف)}$$

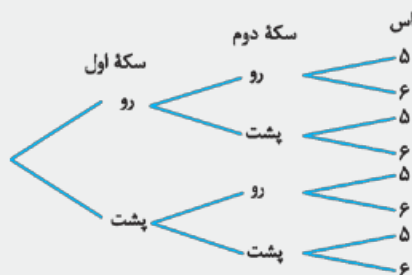
ب) می‌توانیم برای نوشتن حالت‌ها از نمودار استفاده کنیم. حالت‌های دو سکه را رسم کرده و تاس در پایان می‌تواند ۵ یا ۶ باشد. تعداد انتهای شاخه‌ها برابر  $n(A)$  خواهد بود.

$$\Rightarrow n(A) = 8$$

می‌توانستیم مسئله را این‌طور نیز حل کنیم. دو تا سکه داریم و یک تاس که فقط ۵ و ۶ دارد و

$$2^2 \times 2 = 8$$

می‌نویسیم:



**(یک سؤال پرتاب دو تاس و بررسی مجموع دو عدد رو شده)**

به نمودار مقابل نگاه کنید، محور افقی عددهای رو شده یک تاس و محور عمودی عددهای رو شده تاس دیگر را نشان می‌دهد و هر نقطه معین شده، حالتی است که می‌تواند برای دو تاس هم‌زمان رخ دهد. نقطه‌های قرار گرفته در هر ناحیه، نقطه‌هایی هستند که حاصل جمع دو عدد رو شده در آن ناحیه مساوی است.

به طور مثال عدد ۷، بیشترین حالت ممکن در حاصل جمع اعداد رو شده دو تاس را خواهد داشت که در نمودار کاملاً مشخص است و در مجموعه مقابل دیده می‌شود.

$$\Rightarrow \text{حالت } 6 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

**دقت کنید!!!** تعداد حالت‌های هر کدام از حاصل جمع‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به ترتیب با تعداد حالت‌های حاصل جمع‌های ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹ و ۸ برابر است.

**تست:** در پرتاب دو تاس چند حالت وجود دارد که مجموع دو عدد رو شده بزرگ‌تر از ۸ باشد؟

$$12 (4)$$

$$11 (3)$$

$$10 (2)$$

$$9 (1)$$

**پاسخ:** برای حل می‌توانیم با نمودار پرتاب دو تاس کار کنیم، با توجه به نمودار، تعداد حالت‌های حاصل جمع ۹، برابر ۴، تعداد حالت‌های حاصل جمع ۱۰، برابر ۳، تعداد حالت‌های حاصل جمع ۱۱، برابر ۲ و تعداد حالت‌های حاصل جمع ۱۲، برابر ۱ است و کل حالت‌های خواسته شده برابر است با:

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

بنابراین **گزینه (۲) صحیح است.**

**تست:** چهار لامپ کنار هم روی یک ردیف قرار گرفته‌اند. به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را روشن کرد؟

$$10 (4)$$

$$6 (3)$$

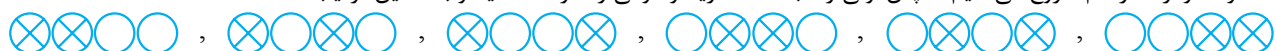
$$5 (2)$$

$$4 (1)$$

**پاسخ:** هدف از این تست و در این‌جا این است که شما دست به کار شوید و این حالت‌ها را بکشید یا بنویسید. از نظم تغییرات استفاده کنید تا حالتی را جا نیندازید یا چیزی را اضافه نشمرید. بعد از حل خودتان، به روش پاسخ نگاه کنید.

علامت روشن =  $\otimes$  و علامت خاموش =  $\circ$

از یک گوشه و از کنار هم شروع می‌کنیم، سپس اولی را ثابت نگه دارید و دومی را حرکت دهید و به همین ترتیب ...



می‌بینیم که ۶ حالت مختلف می‌تواند اتفاق بیفتد. بنابراین **گزینه (۳) صحیح است.**

## احتمال وقوع یک پیشامد

احتمال وقوع یک پیشامد مانند پیشامد  $A$  وقتی قابل بررسی و محاسبه است که فضای نمونه  $S$  و پیشامد  $A$  کاملاً معین و مشخص باشند. احتمال وقوع یک پیشامد وابسته به  $n(A)$  و  $n(S)$  است و باید هر کدام را محاسبه کرد.

$$\text{احتمال وقوع پیشامد } A = \frac{\text{تعداد عضوهای مجموعه } A}{\text{تعداد عضوهای مجموعه } S} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

**احتمال قطعی یا صد در صد:** اگر در محاسبه احتمال یک پیشامد، حاصل احتمال عدد ۱ باشد، می‌گوییم آن احتمال قطعی است و حتماً رخ می‌دهد. به طور مثال: با چه احتمالی در پرتاب یک تاس عدد روشده بین صفر تا ۷ خواهد بود؟ در این مسئله:  $A = S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $n(A) = 6$  و

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1 \quad n(S) = 6, \text{ در نتیجه:}$$

**احتمال غیرممکن یا نشدنی:** اگر در محاسبه احتمال یک پیشامد، حاصل احتمال عدد «صفر» باشد، می‌گوییم آن احتمال غیرممکن است. به طور مثال: با چه احتمالی در پرتاب یک تاس، عدد روشده برابر ۱۰ است؟

در این مسئله، مجموعه پیشامد  $A$  برابر  $\{\}$  است و  $n(A) = 0$  و  $n(S) = 6$ ، پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

برای تسلط روی بحث احتمال، باید زیاد مسئله حل کنید. حل مسئله‌های گوناگون در این بحث، بسیار تأثیرگذار خواهد بود.

**تست:** در ۶ بار پرتاب یک سکه پشت سر هم، چه قدر احتمال دارد که ۳ تا «رو» ظاهر شود و این ۳ تا «رو» کنار هم باشند؟

$$\frac{1}{16} \quad (1) \qquad \frac{1}{32} \quad (2) \qquad \frac{1}{8} \quad (3) \qquad \frac{5}{64} \quad (4)$$

**پاسخ:** ابتدا  $n(S)$  را محاسبه می‌کنیم:

محاسبه  $n(A)$  کمی شبیه مسئله روشن کردن ۲ لامپ از ۴ لامپ است، در این جا باید سه تا «رو» و سه تا «پشت» بیاید که سه تا «رو» به هم چسبیده هستند،

می‌توان نوشت:

$$A = \{(ررررپپ), (ررررپ), (پپرررر), (پپرررپ)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**تست:** با رقم‌های ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، می‌خواهیم عددهای پنج‌رقمی بدون تکرار رقم‌ها بسازیم. با چه احتمالی عدد ساخته شده فرد است؟

$$\frac{3}{7} \quad (1) \qquad \frac{1}{2} \quad (2) \qquad \frac{1}{3} \quad (3) \qquad \frac{4}{7} \quad (4)$$

**پاسخ:** شاید به فکر شمردن تعداد کل عددهای ساخته شده و تعداد عددهای فرد باشید اما بیایید ساده‌تر فکر کنیم. زوج و فرد بودن از کدام رقم تعیین

می‌شود؟ «رقم یکان». پس فقط یکان را بررسی می‌کنیم. هفت رقم مختلف داریم که می‌توانند در یکان قرار بگیرند، پس  $n(S) = 7$ . چهار رقم داریم

که فرد هستند و عدد ساخته شده را فرد می‌کنند، پس  $n(A) = 4$ . می‌توان نوشت:

$$A = \text{پیشامد فرد بودن عدد} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{7}$$

**پاسخی دیگر:** روش کلی برای حل این گونه سؤالات به این صورت است که ابتدا تعداد کل حالت‌های ممکن ( $n(S)$ ) و تعداد حالت‌های مطلوب ( $n(A)$ ) را به

دست می‌آوریم و سپس احتمال را محاسبه می‌کنیم؛ چون ۷ رقم مختلف داریم، بنابراین در کل به تعداد زیر می‌توان عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام نوشت:

$$\frac{7}{\text{هزار}} \times \frac{6}{\text{یک}} \times \frac{5}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یک}} \Rightarrow n(s) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

از میان اعداد ۵ رقمی با رقم‌های (۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹)، باید اعداد فرد را به دست بیاوریم، داریم:

$$\frac{6}{\text{هزار}} \times \frac{5}{\text{یک}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{یک}} \Rightarrow n(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{4}{7}$$

تعداد ارقام فرد (۳، ۵، ۷، ۹)

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

● اگر در مجموعه S، تعدادی پیشامد مانند A، B و C تعریف کنیم که هیچ‌کدام دارای عضو مشترک نباشند، یعنی با هم اتفاق نیفتند و اشتراک دوبه‌دو هر کدام تهی باشد؛ همواره:

$$P(A) + P(B) + P(C) + \dots = 1$$

● در فضای نمونه S، همواره مجموع احتمال پیشامد A و احتمال پیشامد متمم A برابر ۱ است.  $P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$

**تست:** در پرتاب هم‌زمان ۷ سکه، با چه احتمالی حداقل ۲ تا «پشت» می‌آید؟

$$\frac{5}{8} \text{ (۱)} \quad \frac{15}{16} \text{ (۲)} \quad \frac{31}{32} \text{ (۳)} \quad \frac{63}{64} \text{ (۴)}$$

**پاسخ:** خب!  $n(S) = 2^7$ . برای  $n(A)$  باید همه حالت‌های ۲ تا پشت تا ۷ تا پشت را بشماریم که کار وقت‌گیر، سخت و پراشتباهی است. اما دقت کنید می‌توانیم متمم پیشامد «روشدن حداقل ۲ تا پشت» را بشماریم که برابر «روشدن حداکثر ۱ پشت» است. «روشدن حداکثر ۱ پشت» یعنی یا اصلاً پشت ظاهر نشود یا فقط یک بار ظاهر شود، که هر کدام از سکه‌ها یک بار می‌توانند پشت بیایند.

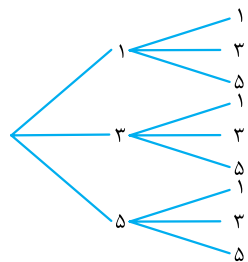
$$\Rightarrow n(A') = (\text{حالت‌های فقط ۱ پشت}) + (\text{حالت‌های هیچ پشت}) = 1 + 7 = 8 \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{8}{2^7} = \frac{2^3}{2^7} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**تست:** در پرتاب دو تاس، احتمال آن که حاصل ضرب دو عدد روشده تاس‌ها، عدد فرد باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{5} \text{ (۴)}$$



**پاسخ:** دو تاس را پرتاب می‌کنیم، تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$n(S) = 6^2 = 36$$

حاصل ضرب دو عدد روشده به شرطی فرد می‌شود که هر دو عدد روشده، فرد باشد. با توجه به نمودار روبه‌رو،  $n(A) = 9$  خواهد بود.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

**تست:** در پرتاب هم‌زمان دو تاس، احتمال زوج‌بودن حاصل ضرب دو عدد روشده، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{4}{5} \text{ (۴)}$$

**پاسخ:** به تست قبل دقت کنید. در آن جا به دنبال حاصل ضرب فرد دو عدد روشده بودیم و این جا به دنبال متمم آن، یعنی حاصل ضرب زوج هستیم.

پس با توجه به رابطه زیر، مسئله را حل می‌کنیم.

$$A' = \text{زوج‌بودن حاصل ضرب} = \text{پیشامد } A \quad P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

### ترکیب پیشامدها و احتمال

یکی از رابطه‌های دیگر، بین مجموعه‌ها و بحث احتمال همین‌جا دیده می‌شود. جایی که عضوهای یک پیشامد را، با استفاده از مجموعه‌های دو یا چند پیشامد دیگر می‌توان به دست آورد. در چنین حالت‌هایی اعمال روی مجموعه‌ها به کمکمان می‌آیند.

① وقتی دو پیشامد A و B، هم‌زمان رخ می‌دهند، می‌گوییم پیشامد  $A \cap B$  رخ داده است. به طور مثال در ساختن عددی سه‌رقمی بگوییم، عدد زوج باشد و صدگان حتماً فرد باشد، دو پیشامد را هم‌زمان و با هم بررسی می‌کنیم و پیشامد (فردبودن صدگان  $\cap$  زوج‌بودن عدد) را بررسی می‌کنیم.

② وقتی هر کدام از پیشامدهای A و B بتوانند اتفاق بیفتند، می‌گوییم پیشامد  $A \cup B$  رخ خواهد داد.

به طور مثال اگر بگوییم، در پرتاب یک تاس عدد روشده زوج یا مضرب ۳ باشد، در این جا چه عدد روشده زوج باشد و چه مضرب ۳ و چه هر دو خاصیت را داشته باشد، مورد قبول است و پیشامد (مضرب ۳ بودن  $\cup$  زوج‌بودن) بررسی می‌شود.



Ⓒ وقتی پیشامد A رخ دهد، اما پیشامد B رخ ندهد، می‌گوییم پیشامد  $A - B$  رخ می‌دهد. به طور مثال اگر بگوییم در بین عددهای ۱ تا ۱۰۰ عددی را که مضرب ۳ باشند، اما زوج نباشند می‌خواهیم، به دنبال بررسی پیشامد (عددهای زوج - عددهای مضرب ۳) خواهیم بود.

Ⓓ اگر پیشامد A رخ ندهد، پیشامد  $A'$  رخ می‌دهد. به طور مثال اگر بگوییم، در بین عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، پیشامد آن که عدد انتخابی فرد نباشد، به بررسی متمم فرد بودن یعنی زوج بودن می‌پردازیم:

**روابط احتمال در ترکیب پیشامدها:** رابطه‌هایی را که در مورد عدد اصلی مجموعه‌ها یاد گرفتیم، می‌توانیم به احتمال وقوع همان پیشامدها تبدیل کنیم. رابطه‌های عدد اصلی مجموعه با تقسیم کردن طرفین بر  $n(S)$ ، به روابط احتمال تبدیل خواهد شد.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\div n(S)} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

و به همین ترتیب:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

**تست:** در یک جامعه مشخص، احتمال آن که فردی ورزش دوست باشد،  $\frac{3}{4}$  و احتمال آن که هنردوست باشد،  $\frac{2}{5}$  است. احتمال آن که فردی در این جامعه هم ورزش دوست و هم هنردوست باشد، چه قدر است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۲) \quad \frac{2}{5} \quad (۳) \quad \frac{1}{10} \quad (۴)$$

**پاسخ:** می‌توانیم از رابطه  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  استفاده کنیم.

(ورزش دوست و هنردوست  $= A \cap B$ ) و (هنردوست  $= B$ ) و (ورزش دوست  $= A$ )

چون کل افراد جامعه را بررسی کرده‌ایم،  $P(A \cup B) = 1$  خواهد بود.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{23}{20} - 1 = \frac{3}{20}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**تست:** در بین عددهای ۱ تا ۱۰۰۰ یک عدد انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد اما مضرب ۵ نباشد، چه قدر است؟

$$\frac{0}{2} \quad (۱) \quad \frac{0}{267} \quad (۲) \quad \frac{0}{3} \quad (۳) \quad \frac{0}{367} \quad (۴)$$

**پاسخ:** فرض می‌کنیم (مضرب ۳ بودن  $= A$ ) و (مضرب ۵ بودن  $= B$ )، حال  $P(A - B)$  را باید بررسی کنیم.  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$n(A) = 333 =$  خارج قسمت صحیح تقسیم ۱۰۰۰ بر ۳ بر تعداد عددهای مضرب ۳ از ۱ تا ۱۰۰۰

$A \cap B$ ، یعنی عددهایی که هم مضرب ۳ و هم مضرب ۵ هستند؛ یعنی عددهای مضرب ۱۵.

$\Rightarrow n(A \cap B) = 66 =$  خارج قسمت تقسیم ۱۰۰۰ بر ۱۵ بر تعداد عددهای مضرب ۱۵ از ۱ تا ۱۰۰۰

$$n(S) = 1000 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{333}{1000}, P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{66}{1000} \Rightarrow P(A - B) = \frac{333}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{267}{1000} = \frac{0}{267}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**احتمال‌های مستقل:** اگر پیشامدهای A و B در هنگام رخ دادن تأثیری روی هم نداشته باشند، می‌گوییم این احتمال‌ها مستقل هستند.

به طور مثال در پرتاب چند تاس پشت سر هم، عدد روشده اولی تأثیری روی اعداد روشده بعدی ندارد و برعکس؛ یا اگر ۱۰۰ بار سکه‌ای را بیندازیم و همه «پشت» بیاید، باز هم احتمال «پشت» آمدن سکه در بار ۱۰۱ ام برابر  $\frac{1}{2}$  است.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

• اگر احتمال‌های A و B مستقل باشند، آن‌گاه احتمال اشتراک آن‌ها برابر است با:

**تست:** در پرتاب یک سکه و یک تاس، احتمال آن که سکه رو بیاید و عدد تاس فرد باشد، چه قدر است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۱) \quad \frac{1}{3} \quad (۲) \quad \frac{1}{4} \quad (۳) \quad \frac{1}{5} \quad (۴)$$

**پاسخ:** پشت یا رو آمدن سکه، تأثیری روی عدد تاس ندارد و برعکس؛ پس این دو پیشامد مستقل هستند.  $P(A) = \frac{1}{2}$  = احتمال رو آمدن سکه

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \text{احتمال فرد بودن عدد در پرتاب تاس}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  احتمال وقوع هم‌زمان دو پیشامد

**تست:** در یک کیسه ۱۰۰ گوی با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد، می‌خواهیم دو بار گوی از کیسه برداریم (هر بار که یک گوی برمی‌داریم، آن گوی را به کیسه برمی‌گردانیم). با چه احتمالی عدد گوی اول، بزرگ‌تر از ۷۵ و عدد گوی دوم کوچک‌تر از ۴۱ است؟

$$\frac{3}{10} \quad (۱) \quad \frac{1}{5} \quad (۲) \quad \frac{1}{10} \quad (۳) \quad \frac{1}{30} \quad (۴)$$

**پاسخ:** چون پس از برداشتن گوی اول، آن را به کیسه برمی‌گردانیم، برداشتن این دو گوی و عدد آن‌ها، دو پیشامد مستقل است. در گوی اول به دست

$$P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \text{احتمال مطلوب گوی اول} \quad \text{آوردن عددهای ۷۶ تا ۱۰۰ مطلوب است که ۲۵ عدد هستند.}$$

$$P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = \text{احتمال مطلوب گوی دوم} \quad \text{در گوی دوم، به دست آمدن عددهای ۱ تا ۴۰ مطلوب است که ۴۰ عدد هستند.}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

**تست:** اگر در یک آزمون ۱۰ سؤالی چهارگزینه‌ای، به طور تصادفی گزینه‌ها را انتخاب کنید، احتمال آن که ۱۰۰ درصد نمره را بگیرید، چه قدر است؟

$$\frac{1}{20} \quad (۱) \quad \frac{1}{10} \quad (۲) \quad \frac{1}{19} \quad (۳) \quad \frac{1}{29} \quad (۴)$$

**پاسخ:** انتخاب هر گزینه در هر سؤال نسبت به انتخاب گزینه سؤال بعدی مستقل است و احتمال درست‌زدن در هر سؤال  $\frac{1}{4}$  است.

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{10}) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_{10}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{1}{2^{20}}$$

عددی که به دست می‌آوریم، تقریباً برابر  $\frac{1}{1,000,000} = \frac{1}{10^6}$  (یک میلیونیم) است. با این شانس باید بگوییم: «عزیزان در آزمون‌های دارای نمره

منفی اصلاً شانس تست نزنید.» چون احتمال درست‌زدن در هر سؤال،  $\frac{1}{4}$  غلط‌زدن آن است یا بهتر است بگوییم اگر شانس انتخاب کنید احتمال غلط‌زدن، ۳ برابر درست‌زدن است. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

**تست:** احتمال ابتلا به ویروس X در دنیا  $\frac{1}{1000}$  است. اگر کسی به این ویروس مبتلا شود، احتمال زنده ماندن او ۲۰ درصد است. هر شخص با چه احتمالی در برابر این ویروس فوت می‌کند؟

$$\frac{1}{2500} \quad (۱) \quad \frac{1}{1000} \quad (۲) \quad \frac{1}{2000} \quad (۳) \quad \frac{1}{1250} \quad (۴)$$

**پاسخ:** پیشامد ابتلا به ویروس و پیشامد زنده ماندن مبتلا، مستقل از یکدیگر هستند.

$$P(B) = \frac{8}{10} = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \text{احتمال فوت مبتلا} \Rightarrow \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \text{احتمال زنده ماندن مبتلا}$$

$$P(A) = \frac{1}{1000} \quad \text{بنابراین گزینه (۴) صحیح است.} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{1000} \times \frac{8}{10} = \frac{8}{10000} = \frac{1}{1250}$$

### مطالعه آزاد اما واجب

دوستان عزیز، این بخش در کتاب درسی پایه نهم وجود ندارد و به عنوان مطالعه آزاد در نظر گرفته شده است. شما این مطالب را در سال‌های بعد در کتاب‌های درسی خواهید آموخت؛ اما چنین سؤال‌هایی و با این نگاه و طرز تفکر، در برخی آزمون‌های ورودی مدارس برتر پرسیده می‌شود. علاوه بر آن، این مباحث در برخی مدارس برتر دوره اول دبیرستان تدریس می‌شود و خوب است شما هم با مطالعه درس‌نامه کتاب که قدم‌به‌قدم این موضوع را جلو برده و سعی در ارائه مهم‌ترین سؤالات این بخش نموده است، توان خود را در این زمینه بالا ببرید. پیروز باشید.

## ● اصول اولیه شمارش

برای حل مسئله‌های احتمال، شمارش حالت‌های مختلف پیشامدها و فضای نمونه بسیار مهم است. معمولاً روش‌های دستی شمارش سخت و وقت‌گیر خواهند بود. بنابراین با استفاده از اصول شمارش، کار آسان‌تر خواهد بود، به شرطی که آن‌ها را خوب بیاموزید. در ضمن سؤالات شمارش، در آزمون‌های ورودی مدارس پرسیده می‌شوند. (قبلاً هم گفتیم) (٧)

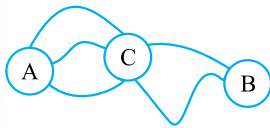
### اصل ضرب

فرض کنید صاحب کارخانه‌ای هستید که توپ ورزشی تولید می‌کند. شما توپ‌های خود را در سه رنگ آبی، قرمز و سبز و در چهار رشته والیبال، بسکتبال، فوتبال و هندبال به بازار عرضه می‌نمایید. حال یک خبرنگار در مصاحبه‌ای از شما می‌پرسد که کارخانه شما چند محصول مختلف تولید می‌کند؟ شما چه جوابی می‌دهید؟ آیا می‌توانید سریعاً جواب بدهید؟ ممکن است برای او این جدول را بکشید.

والیبال آبی	بسکتبال آبی	فوتبال آبی	هندبال آبی
والیبال قرمز	بسکتبال قرمز	فوتبال قرمز	هندبال قرمز
والیبال سبز	بسکتبال سبز	فوتبال سبز	هندبال سبز

همان‌طور که می‌بینید شما از هر نوع توپ سه رنگ تولید می‌کنید و در نتیجه  $3 \times 4 = 12$ . دقت کنید دو شرط، برای تولید محصول شما وجود دارد. ① نوع توپ و ② رنگ توپ. اگر یکی از این انتخاب‌ها انجام نشود، توپ تولید نمی‌شود.

حال سراغ سؤالی دیگر برویم. شما می‌خواهید به مسافرت بروید، هدف شما سفر از شهر A به شهر B است، اما در مسیر مجبورید از شهر C هم عبور نمایید. تعداد جاده‌های بین شهرها روی شکل مشخص است. آیا می‌توانید بگویید به طور کلی چند مسیر برای سفر شما وجود دارد؟



اگر تعداد مسیرهای A به B را بشمارید، به راحتی عدد  $3 \times 2 = 6$  به دست می‌آید.

**اصل ضرب:** اگر انجام کاری به تعدادی مرحله تقسیم شود و هر مرحله دارای تعدادی حالت، مانند  $a, b, c, d, e, f, \dots, z$  باشد، تمام حالت‌های انجام آن کار برابر است با:

$$a \times b \times c \times d \times e \times \dots \times z$$

حال به حل چند مثال می‌پردازیم:

**مثال:** شما در یک مسابقه برنده شده‌اید و می‌توانید از نمایشگاه، یک اتومبیل و یک موتورسیکلت بردارید. در نمایشگاه ۵ اتومبیل مختلف و ۳

موتورسیکلت مختلف وجود دارد. شما به چند طریق می‌توانید جایزه‌های خود را انتخاب نمایید؟

**پاسخ:** خب، پس هدف، انتخاب یک اتومبیل و یک موتورسیکلت است و حتماً هر دو باید انتخاب شوند.

۵	۳	$5 \times 3 = 15$
---	---	-------------------

کل حالت‌ها      تعداد حالت‌های انتخاب موتورسیکلت      تعداد حالت انتخاب اتومبیل

پس شما به پانزده حالت، می‌توانید جایزه خود را انتخاب نمایید.

**مثال:** معلم مدرسه برای خرید کتاب به کتابفروشی رفته است و می‌خواهد از بین ۳ کتاب علوم، ۷ کتاب ادبیات، ۴ کتاب ریاضی و ۶ کتاب عربی،

از هر کدام یک جلد بخرد، او به چند طریق می‌تواند این خرید را انجام دهد؟ (همه کتاب‌ها مختلف هستند).

**پاسخ:**

۳	۷	۴	۶	$3 \times 7 \times 4 \times 6 = 504$
---	---	---	---	--------------------------------------

کل حالت‌ها      کتاب عربی      کتاب ریاضی      کتاب ادبیات      کتاب علوم



**مثال:** با رقم‌های صفر تا ۹ چند عدد پنج‌رقمی ساخته می‌شود؟

**پاسخ:** برای رقم یکان تا یکان هزار، می‌توان هر یک از  $10$  رقم صفر تا ۹ گذاشت، اما رقم دهگان هزار نمی‌تواند صفر باشد و تنها رقم‌های ۱ تا ۹ می‌توانند در جایگاه دهگان هزار قرار بگیرند. بنابراین:

$9$	$10$	$10$	$10$	$10$	$9 \times 10^4 = 90000$
دهگان هزار	یکان هزار	صدگان	دهگان	یکان	تعداد اعداد پنج‌رقمی

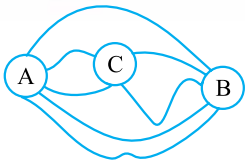
**مثال:** چند عدد چهاررقمی فرد و بدون تکرار ارقام داریم؟

**پاسخ:** اگر ابتدا حالت‌های رقم یکان هزار را معلوم کنیم، تعداد حالت‌ها ۹ خواهد بود؛ رقم بعدی یعنی صدگان ۸ حالت (چون دوباره صفر را نمی‌توان انتخاب کرد، رقم بعدی دهگان ۸ حالت و رقم یکان باید فرد باشد که ... چند حالت؟ نمی‌توانیم بگوییم، چون نمی‌دانیم در یکان هزار چه رقمی قرار داده‌ایم. فرد یا زوج بودن این رقم برایمان مهم است، پس این روش نادرست است. بنابراین ابتدا فرد بودن عدد را تعیین می‌کنیم و سپس سراغ رقم یکان هزار که نباید صفر باشد، می‌رویم.

$$\overset{\text{فرد باشد}}{\underset{\text{صفر نباشد}}{\Delta}} \times \overset{\text{فرد باشد}}{\underset{\text{صفر نباشد}}{\Delta}} \times \underset{\text{صفر نباشد}}{\Delta} \times \underset{\text{صفر نباشد}}{\Delta} \Rightarrow 8 \times 8 \times 7 \times 5 = 2240$$

↓  
(1, 3, 5, 7, 9)

### اصل جمع



سؤال بعدی مربوط به راه‌های بین شهرهاست، شکل راه‌های ارتباطی شهرهای A، B و C را نشان می‌دهد. چند راه از شهر A به شهر B وجود دارد؟ برای سفر از شهر A به شهر B دو نوع راه وجود دارد، راه‌هایی که از شهر C می‌گذرد و راه‌هایی که مستقیم از شهر A به شهر B متصل هستند. هدف، رسیدن به شهر B است. پس تعداد کل مسیرها برابر است با:

$2 \times 2 = 4$	$3$	$4 + 3 = 7$
تعداد کل مسیرها	تعداد مسیرهای مستقیم از A به B	تعداد مسیرهایی که از C می‌گذرند

**مثال:** می‌خواهیم از بین ۳ کتاب داستان، ۵ کتاب ریاضی و ۲ کتاب تاریخی دو کتاب را برای مطالعه انتخاب کنیم. البته باید دو کتاب انتخاب شده، متفاوت باشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

**پاسخ:** حالت اول: از کتاب داستان و ریاضی انتخاب کنیم:  
حالت دوم: از کتاب داستان و تاریخی انتخاب کنیم:  
حالت سوم: از کتاب ریاضی و تاریخی انتخاب کنیم:  
که جمع سه حالت بالا برابر است با پاسخ:

حالت  $3 \times 5 = 15$   
حالت  $3 \times 2 = 6$   
حالت  $5 \times 2 = 10$   
حالت  $15 + 6 + 10 = 31$

پس در حل این سؤال به وضوح استفاده هم‌زمان از اصل ضرب و جمع دیده می‌شود. از همین حالا به چنین حالت‌بندی‌هایی دقت کرده و نوشتن آن را یاد بگیرید.

قبل از ادامه بحث بهتر است، مطلبی رو یاد بگیرید و یا برای بعضی‌ها یادآوری بشه.

### «n فاکتوریل» یا n!

به حاصل ضرب اعداد  $n, n-1, n-2, \dots, 1$  فاکتوریل گفته و با نماد  $n!$  نمایش می‌دهند؛ مثلاً  $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ .

**دقت کنید!!!** طبق قرارداد  $0! = 1$  است.

**مثال:** عدد ۷! چند برابر عدد ۶! است؟

**پاسخ:**

$$\frac{7!}{6!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7$$



**مثال:** عدد ۷! چند برابر عدد ۵! است؟

**پاسخ:**

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 = 42$$

می‌توان عدد  $n!$  را به صورت‌های دیگری نوشت، برای مثال  $n \times (n-1)!$  و  $n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$ . این شیوه نگارش تنها باعث می‌شود که حجم نوشتن کم شود. با این بیان، بد نیست دو مسئله قبل را دوباره مرور کنیم.

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

$$\frac{7!}{6!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = 7$$

**مثال:** حاصل  $\frac{8!}{5! \times 3!}$  را محاسبه کنید.

**پاسخ:** به یاد داشته باشید که می‌توان کسر فوق را به صورت  $\frac{8!}{5! \times 3!}$  نیز نوشت، یعنی از به کار بردن علامت  $\times$  خودداری کنیم.

$$\frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 8 \times 7 = 56$$

**رابطه تعداد زیرمجموعه‌های  $m$  عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی:** در بخش‌های اولیه درس و در قسمت زیرمجموعه‌های یک مجموعه به این موضوع اشاره کردیم؛ اما در این جا می‌خواهیم روابط قبلی را با کمک فاکتوریل، با ظاهر ساده‌تر و در یک رابطه بیان کنیم.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } m \text{ عضوی در یک مجموعه } n \text{ عضوی} = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } 3 \text{ عضوی یک مجموعه } 5 \text{ عضوی} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } 2 \text{ عضوی یک مجموعه } 6 \text{ عضوی} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

**تست:** تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی، چه قدر از تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی همان مجموعه بیشتر است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

**پاسخ:**

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } 2 \text{ عضوی مجموعه } 7 \text{ عضوی} = \frac{7!}{2! \times (7-2)!} = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{2 \times 1 \times \cancel{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } 4 \text{ عضوی مجموعه } 7 \text{ عضوی} = \frac{7!}{4! \times (7-4)!} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 7 \times 5 = 35$$

$$\Rightarrow 35 - 21 = 14$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

### جایگشت

آشنایی با جایگشت را با بیان و حل یک مسئله آغاز می‌کنیم. سه مجسمه تزئینی شیر، خرس و شکارچی را می‌خواهیم روی میز طوری قرار بدهیم که روی یک خط باشند. ترتیب چیدن (چیدمان) این سه مجسمه به حالت‌های مقابل امکان‌پذیر است:

پس این چیدمان را به ۶ حالت مختلف می‌توان انجام داد. به چنین چیدمان‌های بدون تکراری، جایگشت می‌گویند. برای دستیابی به تعداد جایگشت سه شیء می‌توان نوشت:

حالت ۳	حالت ۲	حالت ۱	$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$
جایگاه ۱	جایگاه ۲	جایگاه ۳	تعداد جایگشت

جایگاه ۳	جایگاه ۲	جایگاه ۱
شکارچی	خرس	شیر
خرس	شیر	شکارچی
شیر	شکارچی	خرس
خرس	شکارچی	شیر
شیر	خرس	شکارچی
شکارچی	شیر	خرس

**مثال:** با ارقام ۱ تا ۶، چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

**پاسخ:** حل این مسئله نیز شبیه حالت قبل است. اما این‌جا به جای ۳ مجسمه متفاوت، ۶ رقم متفاوت داریم. پس در این حالت جواب برابر  $۶! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۷۲۰$  است.

**مثال:** با ارقام ۱ تا ۶ چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت به شرطی که سه رقم ۱، ۵ و ۴ در کنار هم باشند؟ (بدون تکرار ارقام)

**پاسخ:** قبل از نگاه کردن به پاسخ، خودتان سعی کنید که آن را حل نمایید (حداقل ۵ دقیقه فکر کنید).

برای حل مسئله با چنین شرطی، فرض می‌کنیم کل ترکیب ۱۵۴ در یک جایگاه قرار دارد و رقم‌های ۱، ۵ و ۴ کنار هم را یک رقم فرض می‌کنیم (یعنی به جای ارقام ۱ تا ۶، ارقام ۲، ۳، ۶ و (۱۵۴) را داریم). در این حالت کافی است جایگشت‌های ۴ رقم را به دست آوریم، که می‌شود:

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = ۴! = ۲۴$$

اما ۱، ۴ و ۵ نیز خودشان می‌توانند با یکدیگر به ۳! حالت جابه‌جا شوند و جواب مسئله  $۱۴۴ = ۲۴ \times ۶ = ۳! \times ۴!$  است.

**تعریف تبدیل:** به جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء ( $r < n$ ) تبدیل می‌گویند و از رابطه  $\frac{n!}{(n-r)!}$  محاسبه می‌شود.

**مثال:** در یک مسابقه دوی دانش‌آموزی، ۱۰ نفر شرکت می‌کنند. نفرات اول، دوم و سوم این مسابقه به چند حالت می‌توانند باشند؟

**پاسخ:** تعداد حالت‌هایی که از بین ۱۰ دهنده، سه نفر به عناوین اول، دوم یا سوم برسند، مانند این است که سه نفر انتخاب شوند و خودمان آن‌ها

$$\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!} = \frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۷۲۰$$

را در رتبه‌های اول تا سوم قرار دهیم. پس جواب برابر است با:

۱۰	۹	۸	$۱۰ \times ۹ \times ۸ = ۷۲۰$
نفر سوم	نفر دوم	نفر اول	تعداد کل حالت‌ها

**مثال:** تعداد جایگشت‌های  $n$  حرفی و صفرحرفی، از  $n$  حرف متمایز چه قدر است؟

**پاسخ:** طبق رابطه داریم:

$$\frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{(n)!} = \frac{n!}{n!} = ۱ \quad \text{جایگشت‌های صفرحرفی:}$$

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{(0)!} = \frac{n!}{۱} = n! \quad \text{جایگشت‌های } n \text{ حرفی:}$$

**مثال:** با ارقام ۱ تا ۹، چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ چند عدد ۴ رقمی با تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

$$\frac{۹!}{(۹-۴)!} = \frac{۹!}{(۵)!} = \frac{۹!}{۵!} = ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۰۲۴$$

**پاسخ:** در حالت بدون تکرار:

$$۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۹^۴ = ۶۵۶۱$$

در حالت با تکرار:

**مثال:** به شما ۳ تیله داده شده است که دوتای آن‌ها سفید و یکی سیاه است. به چند صورت می‌توان آن‌ها را در یک ردیف و در کنار

هم قرار داد؟

سیاه	سفید	سفید
سفید	سفید	سیاه
سفید	سیاه	سفید

$$۳ \times ۲ \times ۱ = ۳! = ۶$$

**پاسخ:** طبق حالات قبل می‌گوییم، تعداد حالات برابر است با:

حال بیایید شش حالت را در جدولی نشان دهیم:

همان‌طور که در جدول دیده می‌شود، تنها سه حالت می‌توان نوشت و پاسخ ۶ حالت نادرست است. اما

دلیل چیست؟

دلیل این است که در بین این ۳ شیء، ۲ شیء با هم یکسان هستند و جابه‌جایی دو گوی سفید یکسان، حالت جدیدی را ایجاد نمی‌کند. پس می‌توان

$$\frac{۳ \times ۲ \times ۱}{۲} = \frac{۳!}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

گفت از این ۶ حالتی که در ابتدا به دست آوردیم، نصف آن‌ها تکراری است و پاسخ را می‌توان این‌طور نوشت:

**مثال:** حروف کلمه AZMOONVOROODI را به چند حالت متفاوت می توان کنار هم قرار داد؟

**پاسخ:** تعداد کل حروف کلمه AZMOONVOROODI برابر ۱۳ است اما ۵ حرف O در آن تکرار شده‌اند. پس تعداد حالت‌ها برابر ۱۳! خواهد بود. ۵ حرف O داریم که جابه‌جایی آن‌ها حالت جدیدی ایجاد نخواهد کرد. اگر این ۵ حرف O را متفاوت در نظر بگیریم، ۵! جایگشت خواهند داشت. پس تعداد کل حالات برابر خواهد بود با:

$$\frac{13!}{5!} = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 51891840$$

به چنین حالت‌بندی‌هایی جایگشت با تکرار می‌گویند.

**تعریف جایگشت با تکرار:** اگر a شیء یکسان با b شیء یکسان، c شیء یکسان، ... و z شیء یکسان مخلوط شوند، تعداد حالاتی که می‌توان آن‌ها را روی یک خط کنار هم قرار داد، برابر است با:

$$\frac{(a + b + c + \dots + z)!}{a! \times b! \times c! \times \dots \times z!}$$

**مثال:** در یک مسابقه شطرنج قرار است با مهره‌های مشکی بازی کنیم. قبل از این که بازی شروع شود، حریف پیشنهادی می‌دهد و می‌گوید «اگر به سؤال من پاسخ درست بدهی، من بدون وزیر بازی خواهم کرد و اگر نادرست پاسخ بدهی، تو باید بدون وزیر بازی کنی.» سؤال حریف من این بود: تمام مهره‌های مشکی را به چند طریق می‌توان کنار هم چید؟

**پاسخ:** می‌دانیم در بازی شطرنج هر طرف ۱۶ مهره دارد که ۸ تا سرباز یکسان، ۲ تا قلعه یکسان، ۲ تا اسب یکسان، ۲ تا فیل یکسان، یک وزیر و یک شاه هستند. پس طبق جایگشت با تکرار تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{16!}{8! \times 2! \times 2! \times 2!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{8} = 2 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$$

**مثال:** ما هم چنان مشغول بازی شطرنج مسئله ۱۶ هستیم و من سؤال حریفم را درست جواب دادم. حال من به او یک فرصت می‌دهم و اگر به سؤال من درست پاسخ دهد، می‌تواند مهره وزیرش را وارد بازی نماید. سؤال من این است: همه مهره‌های سفید را چه‌طور در دو ردیف ۸ تایی چسبیده به هم می‌توان قرار داد؟ **پاسخ:** پاسخ این مسئله با مسئله قبلی تفاوتی نخواهد داشت. چون برای دو ردیف ۸ تایی نیز حالت‌های هر محل قرارگیری مهره‌ها به شکل زیر است. (در حالتی که همه مهره‌ها با هم متفاوت باشند).

۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹
۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$\Rightarrow 16 \times 15 \times 14 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = 16!$$

حالا ۸ مهره سرباز یکسان، ۲ مهره قلعه یکسان، ۲ مهره فیل یکسان و ۲ مهره اسب یکسان داریم و جواب نهایی برابر است با:

$$\frac{16!}{8! \times 2! \times 2! \times 2!} = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$$

**دقت کنید!!!** فرض کنید احمد، حسین، محمد و هادی برای شرکت در مسابقات گل‌کوچک امسال یک تیم تشکیل داده‌اند. اما تنها ۲ نفر از آن‌ها

می‌توانند در طول مسابقه بازی کنند. بیایید بررسی کنیم که به چند حالت می‌توانند تیم درون زمین را انتخاب نمایند؟

$$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 4 \times 3 = 12$$

کافی است جایگشت ۲ نفر از بین چهار نفر را بررسی کرد:

حال بیایید این ۱۲ حالت را بنویسیم:

شماره تیم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
نفر اول	احمد	احمد	احمد	احمد	حسین	محمد
نفر دوم	حسین	محمد	هادی	محمد	هادی	هادی

همان‌طور که می‌بینید، تعداد تیم‌ها نمی‌تواند از ۶ بیشتر باشد، اما تعداد جایگشت‌ها برابر ۱۲ شده است. در استفاده از رابطه جایگشت، باید دقت کرد که در شمارش از طریق جایگشت، ترتیب انتخاب هم در نظر گرفته می‌شود. یعنی اگر ما ابتدا احمد را و سپس حسین را انتخاب نماییم، با حالتی که ما ابتدا حسین را و سپس احمد را انتخاب نماییم،

متفاوت خواهد بود. اما در تشکیل یک تیم این که ابتدا احمد و سپس حسین انتخاب شوند، متفاوت نیست و به هر حال این دو نفر با هم بازی خواهند

نمود. پس باید جواب جایگشت را بر تعداد جایگشت دو نفر تقسیم کرد. پس می‌نویسیم:

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 2 \times 3 = 6$$

**جایگشت دوری:** وقتی  $n$  نفر بخواهند دور یک میز کنار هم بنشینند،  $n!$  حالت به وجود می‌آید که  $n$  حالت آن یکسان است و تفاوتی ندارند، پس در کل  $n$  نفر به صورت  $(n-1)! = \frac{n!}{n}$  دور یک میز می‌توانند قرار بگیرند.

**مثال:** با ۱۰ سنگ مختلف رنگارنگ چند دستبند مختلف می‌توان ساخت؟ (همه دستبندها از ۱۰ سنگ ساخته می‌شوند).

**پاسخ:** در این جا ۱۰ سنگ مختلف داریم و با  $(10-1)! = 9!$  حالت می‌توان دستبند مختلف ساخت. از  $(n-1)!$  استفاده کردیم چون دستبند یک دور ایجاد می‌کند.

### ترکیب یا انتخاب

**تعریف ترکیب یا انتخاب:** اگر بخواهیم از بین  $n$  شیء متمایز،  $m$  شیء متمایز انتخاب نماییم، به شرطی که ترتیب انتخاب آن‌ها مهم نباشد، از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

انتخاب  $r$  شیء از  $n$  شیء

**مثال:** در مسابقات انتخابی جام جهانی قاره آسیا، تیم ایران در گروه A با تیم‌های کره جنوبی، ازبکستان، لبنان و قطر در یک گروه قرار دارد. قرار

است هر دو تیم یک بار با یکدیگر بازی کنند. در کل چند بازی در این گروه انجام خواهد شد؟

**پاسخ:** کافی است ترکیب ۲ تیم از بین ۵ تیم را محاسبه کنیم:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$$

**مثال:** در یک آزمون ۱۰ سؤالی کافی است تا به ۶ سؤال پاسخ دهید. به چند طریق می‌توانید این ۶ سؤال را انتخاب کنید؟

**پاسخ:** چون ترتیب سؤالات مهم نیست، پس جواب برابر انتخاب ۶ سؤال از ۱۰ سؤال خواهد بود:

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

**مثال:** تعداد انتخاب‌های  $n$  شیء از  $n$  شیء، صفر شیء از  $n$  شیء، ۱ شیء از  $n$  شیء، ۲ شیء از  $n$  شیء را محاسبه نمایید.

**پاسخ:**  $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \times (n-0)!} = \frac{n!}{0! \times n!} = \frac{1}{1} = 1$  انتخاب صفر تا از  $n$  شیء

$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = \frac{n}{1} = n$  انتخاب ۱ شیء از  $n$  شیء

$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$  انتخاب ۲ شیء از  $n$  شیء

**تست:** با حروف کلمه Kheilisabz همه کلمه‌های ۱۰ حرفی ممکن را ساخته‌ایم. حالا یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی کلمه sabz

در آن دیده می‌شود؟

$$\frac{1}{720} \quad (4) \qquad \frac{1}{810} \quad (3) \qquad \frac{1}{560} \quad (2) \qquad \frac{1}{900} \quad (1)$$

**پاسخ:** ابتدا تعداد کل کلمات ممکن را با استفاده از جایگشت با تکرار محاسبه می‌کنیم؛ چون حرف  $i$  دو بار تکرار شده است.

$$n(S) = \frac{10!}{2!}$$

برای محاسبه  $n(A)$ ، چهار حرف  $a, b, z$  را کنار هم و یک حرف در نظر می‌گیریم، حالا ۷ حرف داریم که دوباره  $i$  در آن دو بار تکرار شده است.

$$n(A) = \frac{7!}{2!} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{7!}{2!}}{\frac{10!}{2!}} = \frac{7!}{10!} = \frac{1}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{720}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**تست:** در مجموعه  $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$  یک زیرمجموعه انتخاب کرده‌ایم. با چه احتمالی این زیرمجموعه ۲ عضوی بوده و مجموع رقم‌هایش زوج است؟

$$\frac{10}{128} \quad (4)$$

$$\frac{10}{256} \quad (3)$$

$$\frac{10}{512} \quad (2)$$

$$\frac{10}{1024} \quad (1)$$

**پاسخ:** تعداد کل زیرمجموعه‌ها یا  $n(S)$  برابر  $2^{10}$  است. اما پیشامد  $A$  فقط در زیرمجموعه‌های دو عضوی دیده می‌شود. در دو حالت، حاصل جمع ۲ عضو زیرمجموعه زوج خواهد بود: ۱- هر دو فرد باشند، ۲- هر دو زوج باشند.

$$\text{انتخاب ۲ تا از ۵ عدد فرد} = \text{انتخاب ۲ تا از ۵ عدد فرد} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\Rightarrow n(A) = 10 + 10 = 20$$

$$\text{انتخاب ۲ تا از ۵ عدد زوج} = \text{انتخاب ۲ تا از ۵ عدد زوج} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{2^{10}} = \frac{20}{1024} = \frac{5}{256}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

### احتمال در فضای پیوسته

فضاهایی مانند خط، مساحت و زمان پیوسته هستند و قابل شمارش نیستند. در این فضاها برای محاسبه احتمال معمولاً به جای تعداد، طول پاره خط، مساحت شکل‌ها و بازه زمانی اندازه‌گیری می‌شوند.

**مثال:** روی محور اعداد، یک عدد از بین عددهای ۲ تا ۵ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این عدد بین ۳ تا ۴ باشد، چه قدر است؟



**پاسخ:** طول کل ناحیه انتخاب، پاره خطی است که انتهای آن ۵ و ابتدای آن ۲ است و طول آن  $5 - 2 = 3$  است.

اما ناحیه مطلوب، پاره خطی است که ابتدای آن ۳، انتهای آن ۴ و طول آن  $4 - 3 = 1$  است.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\text{طول } A}{\text{طول } S} = \frac{1}{3}$$

**تست:** در یک مسابقه دarts می‌توانیم یک تیر پرتاب کنیم. در صورتی که بتوانیم به ناحیه رنگی بزنیم، برنده هستیم،

با توجه به این که شعاع دایره‌های رنگی ۲، ۳، ۵ و شعاع دایره بزرگ ۱۰ می‌باشد، احتمال برنده شدن چه قدر است؟

$$\frac{9}{25} \quad (4)$$

$$\frac{7}{20} \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{19}{50} \quad (1)$$

$$\Rightarrow S \text{ مساحت} = \pi \times 10 \times 10 = 100\pi$$

**پاسخ:** مجموعه  $S$ ، همان سطح دایره به شعاع ۱۰ است.

$$A \text{ مساحت} = \pi \times 2 \times 2 + \pi \times 3 \times 3 + \pi \times 5 \times 5 = 4\pi + 9\pi + 25\pi = 38\pi$$

مجموعه  $A$ ، برابر مجموع مساحت ۳ دایره دیگر است:

$$\Rightarrow P(A) = \frac{A \text{ مساحت}}{S \text{ مساحت}} = \frac{38\pi}{100\pi} = \frac{19}{50}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.



# سوالات چندگزینه‌ای

## ● معرفی مجموعه، عضوهای مجموعه

۱- کدام یک از گزینه‌ها، یک مجموعه را معین می‌کند؟

- (۱) ۱۰ عدد گویا کوچک‌تر از ۱۰  
 (۲) مضرب‌های صحیح و کوچک‌تر از هزار عدد ۷  
 (۳) چهار عدد فرد طبیعی  
 (۴) سه شمارنده طبیعی عدد ۸

۲- کدام عبارت، یک مجموعه را تعیین نمی‌کند؟

- (۱) مضرب‌های طبیعی عدد ۱۱  
 (۲) بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از صفر  
 (۳) مقسوم‌علیه‌های زوج عدد ۱۲۳  
 (۴) دو شماره اول عدد ۱۲۰

۳- کدام یک از گزینه‌های زیر یک مجموعه را مشخص نمی‌کند؟

- (۱) اعداد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۱۳۹۸  
 (۲) انسان‌های موفق در سال ۱۳۹۷  
 (۳) گندم‌های تولیدشده در سال ۱۳۹۶  
 (۴) راه‌یافتگان به مدارس تیزهوشان در سال ۱۳۹۵

۴- کدام مجموعه، تعداد عضو بیشتری دارد؟

- (۱)  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100\}$   
 (۲)  $\{1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, \dots, 100^\circ\}$   
 (۳)  $\{1, \{1\}\}$   
 (۴)  $\{\{\{\}\}, \{\emptyset, \{\}\}\}$

۵- مجموعه  $A = \{2^{23}, 8^{11}, 32^7, \sqrt{64^{11}}\}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۴  
 (۲) ۳  
 (۳) ۲  
 (۴) ۱

۶- اگر  $A = \{2, \{2\}, \{2, 2\}, \{2, 2, 2\}\}$  باشد، کدام عبارت درست است؟

- (۱) مجموعه  $A$ ، ۴ عضو دارد.  
 (۲)  $\{\{2\}\} \in A$   
 (۳)  $6 \in A$   
 (۴)  $A$  بیش از ۱ عضو دارد.

۷- اگر  $A = \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_5\}$  یک مجموعه پنج‌عضوی باشد،  $n$  برابر است با؟

- (۱) ۹  
 (۲) ۱۰  
 (۳) ۵  
 (۴) ۱

۸- مجموعه  $\{a^1, b^2, b^2, c^3, c^3, c^3, \dots, j^{10}\}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۰  
 (۲) ۱۱  
 (۳) ۹  
 (۴) ۱۲

۹- مجموعه  $A = \{2^{11} + 2, 2^{11} + 4, 2^{11} + 6, \dots, 2^{12}\}$  چند عضو دارد؟

- (۱)  $2^{12}$   
 (۲)  $2^9$   
 (۳)  $2^{10}$   
 (۴)  $2^{11}$

۱۰- چند مجموعه با دو یا چند عضو حسابی متوالی وجود دارد که مجموع اعضای آن‌ها برابر ۱۵ باشد؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴  
 (۵) ۵

۱۱- با توجه به مجموعه  $M = \{a, \{a\}, \{a, \{\}\}\}$ ، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱)  $a \in M$   
 (۲)  $\{a\} \in M$   
 (۳)  $\{a, \{\}\} \in M$   
 (۴)  $\{\}\in M$

۱۲- اگر  $a \in \mathbb{Z}$  و  $-a \in A$  باشد، آن‌گاه مجموعه  $A$  برابر کدام مجموعه نمی‌تواند باشد؟

- (۱)  $\mathbb{Z}$   
 (۲)  $\mathbb{Q}$   
 (۳)  $\mathbb{R}$   
 (۴)  $\mathbb{N}$

۱۳- دو مجموعه  $\{-1\}$  و  $\{m - n, n^2\}$  برابرند. حاصل  $mn$  چیست؟

- (۱) -۱  
 (۲) ۱  
 (۳) ۲  
 (۴) -۲

(سلام ۹۸)

(روبوکاپ ۸۷)

(روبوکاپ ۸۴)

(تیزهوشان)

(تیزهوشان)

(نمونه دولتی تهران ۹۶)

(تیزهوشان)

۱۴- دو مجموعه A و B مساوی هستند، x و y کدام است؟  $A = \{\{x-1\}, \{3\}\}$  و  $B = \{\{\delta\}, \{x-y\}\}$

$x = y = 6$  (۴)       $x = y = 3$  (۳)       $y = 6, x = 3$  (۲)       $x = 6, y = 3$  (۱)

(روبوکاپ ۸۴)

۱۵- اگر دو مجموعه  $A = \{1, a, b\}$  و  $B = \{0, a-1, b+2\}$  با هم برابر باشند، در این صورت کدام گزینه همواره درست است؟

$2a - b = 2$  (۴)       $a + b = 2$  (۳)       $a - 2b = 2$  (۲)       $a + b = -1$  (۱)

(روبوکاپ ۸۴)

۱۶- فرض کنید  $\{x, y, z, t\} = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $x^2 + y^2$  یکی از شمارنده‌های  $z^2 + t^2$  است. کدام گزینه حتماً درست است؟

$1 \in \{z, t\}$  (۴)       $3 \in \{z, t\}$  (۳)       $2 \in \{z, t\}$  (۲)       $4 \in \{z, t\}$  (۱)

۱۷- اگر  $G = \{9 + x, y - 4\}$  یک مجموعه تک‌عضوی باشد، چند مقدار مختلف برای  $(x^2 + y^2)$  وجود دارد؟

بیش از ۴ تا (۴)      ۴ (۳)      ۳ (۲)      ۲ (۱)

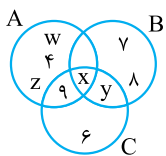
۱۸- مقدار  $x + y$  چه قدر خواهد بود، اگر دو مجموعه  $A = \{x - 2, 4 - x\}$  و  $B = \{y^2 - 3\}$  برابر باشند؟

۵ (۴)      -۱ یا ۵ (۳)      ۱ یا ۵ (۲)      ۱ (۱)

۱۹- کدام مجموعه با بقیه مجموعه‌ها مساوی نیست؟

$\{12 + 1, \frac{1}{3} \div 2, (-\frac{1}{19})^{-1}, -\frac{12}{3}\}$  (۲)       $\{(1^0 + 2^1 - 3^2), \sqrt{169}, \frac{3}{4} \div \frac{6}{4}, (-19)\}$  (۱)

$\{\sqrt{(\frac{38}{2})^2} \times (-1), \sqrt{16} + \sqrt{81}, 2 \times (-3), 4^{-1}\}$  (۴)       $\{-6, (\sqrt{\frac{1}{4}})^4, \sqrt{144} - 1, -\frac{57}{3}\}$  (۳)



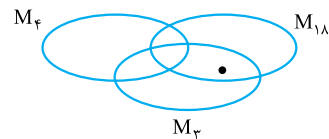
۲۰- عناصر ۱، ۲، ۳، ...، ۹ عضو سه مجموعه A، B و C هستند. به جز ۴ عضو X، Y، Z و W بقیه اعضا در شکل مقابل

(نشانی علامه طباطبائی)

نشان داده شده‌اند. اگر مجموع اعضای هر سه مجموعه برابر باشند، مقدار X کدام است؟

۲۹ (۲)      ۱ (۱)  
۵ (۴)      ۳ (۳)

۲۱- در نمودار زیر، مجموعه‌های  $M_{18}$ ،  $M_4$ ،  $M_3$  به ترتیب مضرب‌های ۳، مضرب‌های ۴ و مضرب‌های ۱۸ را مشخص می‌کنند. نقطه‌ای که در شکل



نشان داده شده است، نمایانگر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱۵۳۶ (۳)      ۱۰۲ (۲)      ۶۴ (۱)  
۱۵۳ (۵)      ۳۴۲ (۴)

(روبوکاپ ۸۶)

۲۲- اگر  $A_1 = \{1\}$ ،  $A_2 = \{2, 3\}$ ،  $A_3 = \{4, 5, 6\}$ ،  $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$  و  $A_5 = \dots$  باشد،  $A_{12}$  با چه عددی شروع می‌شود؟

۶۹ (۴)      ۶۸ (۳)      ۶۷ (۲)      ۶۶ (۱)

۲۳- می‌دانیم که  $1 \in A$  است، هم‌چنین هر عددی که در A باشد، هم دو برابر آن و هم دو واحد کم‌تر از آن، عضو A هستند، کدام گزینه ممکن

(تیزهوشان ۸۶)

است در A نباشد؟

-۱۳۸۷ (۴)      -۲۰۰۸ (۳)      ۲۰۰۸ (۲)      ۱۳۸۷ (۱)

(انرژی اتمی)

۲۴- مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$  را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر بزرگ‌ترین میانگین را دارد؟

مجموعه مضارب ۴ (۱)      مجموعه مضرب‌های عدد ۸ (۳)  
مجموعه مضرب‌های عدد ۱۰ (۲)      مجموعه مضرب‌های عدد ۱۲ (۴)

(المپیاد پایا)

۲۵- تعداد مجموعه‌هایی که هر کدام متشکل از ۲ یا بیش از ۲ عدد صحیح مثبت متوالی با مجموع ۱۳۸۷ باشد، چند است؟

۵ (۴)      ۴ (۳)      ۳ (۲)      ۲ (۱)

۲۶- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند،  $A \oslash B$  را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$A \oslash B = \{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B, b \neq 0\}$

با توجه به این تعریف، اگر مجموعه A، مجموعه عددهای طبیعی سه‌رقمی باشد، در این صورت چند عدد از اعضای مجموعه  $A \oslash A$  عدد طبیعی است؟

(تیزهوشان ۹۳)

۹۹ (۴)      ۹۰ (۳)      ۹ (۲)      ۹۰۰ (۱)

**۲۷-** مجموعه  $A = \{15, 19, 23, 27, 31, 35, 39\}$  را در نظر بگیرید. چند عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع ۴ عدد عضو مجموعه A نوشت؟

- (تیزهوشان ۱۳۹۴) (IMC ۲۰۱۴)
- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| ۳۵ (۱) | ۲۱ (۲) | ۱۳ (۳) |
| ۱۲ (۴) | ۷ (۵)  |        |

**۲۸-** مجموعه اعداد طبیعی مربع کامل نسبت به کدام عمل زیر بسته است؟

- (تیزهوشان)
- |         |         |           |              |
|---------|---------|-----------|--------------|
| جمع (۱) | ضرب (۲) | تقسیم (۳) | جذرگرفتن (۴) |
|---------|---------|-----------|--------------|

**۲۹-** کدام گزینه نادرست است؟

- (تیزهوشان ۹۱)
- |   |  |
|---|--|
| $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \times b) \in \mathbb{Z}$ (۱) | $a, b \in \mathbb{Z}, (a - b) \in \mathbb{Z}$ (۲)                |
| $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a + b) \in \mathbb{Z}$ (۳)      | $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ (۴) |

### مجموعه به زبان ریاضی

**۳۰-** کدام مجموعه زیر با عضوهایش هم‌خوانی ندارد؟

- (تیزهوشان)
- (۱)  $\{n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{W}\} = \{1, 2, 5, 10, 17, \dots\}$
- (۲)  $\{n(n+2) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$
- (۳)  $\{(-n)^2 \mid n \in \mathbb{N}, 9 < n < 15\} = \{-196, -169, -144, -121, -100\}$
- (۴)  $\{\frac{n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{Z}, -4 < n < 4\} = \{-\frac{3}{10}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}\}$

**۳۱-** مجموعه  $A = \{x^2 \mid \frac{x}{4} \in \mathbb{N}, 2 < x < 10\}$  دارد و بزرگ‌ترین عضو آن ..... است.

- (سلام ۹۶)
- |               |               |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| ۷ عضو - ۹ (۱) | ۳ عضو - ۸ (۲) | ۷ عضو - ۸۱ (۳) | ۳ عضو - ۶۴ (۴) |
|---------------|---------------|----------------|----------------|

**۳۲-** چندتا از مجموعه‌های زیر با مجموعه تهی مساوی است؟

- (الف)  $\{\emptyset, \{\}\}$
- (ب)  $\{x \mid x^2 \leq 0\}$
- (پ)  $\{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{1}{x} > 1\}$
- (۱) ۱ (۱)      (۲) ۲ (۲)      (۳) ۳ (۳)      (۴) صفر (۴)

**۳۳-** کدام گزینه، مجموعه  $\{\frac{1}{a^3 - a} \mid a \in \mathbb{N}, a < 4\}$  را نشان می‌دهد؟

- (سلام ۹۶)
- |  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| $\{\frac{1}{80}, \frac{1}{75}, \frac{1}{72}\}$ (۴) | $\{\frac{1}{80}, \frac{1}{73}, \frac{1}{71}\}$ (۳) | $\{\frac{1}{80}, \frac{1}{75}, \frac{1}{54}\}$ (۲) | $\{\frac{1}{80}, \frac{1}{73}, \frac{1}{54}\}$ (۱) |
|--|--|--|--|

**۳۴-** اگر  $A = \{-1, -\frac{2}{5}, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$  و  $B = \{x \mid x \in A, \frac{x^2}{4} \in \mathbb{N}\}$ ، آن‌گاه مجموعه B چندعضوی است؟

- (انرژی اتمی ۷۳)
- |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۴) | ۲ (۳) | ۳ (۲) | ۴ (۱) |
|-------|-------|-------|-------|

**۳۵-** مجموعه  $A = \{0, 1, 3, 7, \dots\}$  را با زبان ریاضی می‌نویسیم. کدام گزینه درست است؟

- (تیزهوشان ۸۱)
- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| $A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$ (۴) | $A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۳) | $A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$ (۲) | $A = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ (۱) |
|---|---|---|---|

**۳۶-** نمایش ریاضی مجموعه  $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \dots\}$  کدام است؟

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a + 1 = b\}$ (۴) | $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, 2a = b\}$ (۳) | $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a - 1 = b\}$ (۲) | $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, \frac{b}{a} = a\}$ (۱) |
|---|--|---|---|

**۳۷-** عضوهای مجموعه  $A = \{x \mid \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}, x^2 < 20\}$  در کدام گزینه آمده است؟

- |                    |                               |             |                         |
|--------------------|-------------------------------|-------------|-------------------------|
| $\{-3, 0, 3\}$ (۴) | $\{-4, -3, \dots, 3, 4\}$ (۳) | $\{3\}$ (۲) | $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (۱) |
|--------------------|-------------------------------|-------------|-------------------------|

**۳۸-** نمایش اعضای مجموعه  $A = \{x^2 + 2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 100\}$  کدام است؟

- |  |  |
|--|--|
| $A = \{-4, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 10000\}$ (۲) | $A = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, 10000\}$ (۱) |
| $A = \{1, 4, 9, 16, \dots, 98^2\}$ (۴)         | $A = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, 99^2\}$ (۳)  |

۳۹- کدام گزینه اعضای مجموعه A را مشخص می کند؟

$A = \{x \mid x = (-1)^n \times (n^2 - 2n + 1)^2, n \in \mathbb{N}\}$

(۱)  $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$  (۲)  $\{0, 1, -16, 81, \dots\}$  (۳)  $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$  (۴)  $\{1, -16, 81, -64, \dots\}$

۴۰- کدام گزینه نمایش مجموعه B به صورت نمایش عضوهایش می باشد؟

$B = \{x \mid -(x+1) \in \mathbb{Z}, (x+2)^2 < 25\}$

(۱)  $\{-2, -1, 0, \dots, 5, 6\}$  (۲)  $\{-6, -5, -4, \dots, 2\}$  (۳)  $\{0, 1, 2\}$  (۴)  $\{-6, -5, -4, \dots, 0\}$

۴۱- مجموعه  $A = \{12k + 9 \mid k \in \mathbb{N}\}$  مفروض است. اختلاف کوچک ترین عضو چهاررقمی مجموعه A با بزرگ ترین عضو سدهرقمی آن کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲ (سلام ۹۸)

۴۲- اگر  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 < (x-3)^2 < 100\}$ ، آن گاه حاصل جمع عضوهای مجموعه A کدام است؟

(۱) ۳۶ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰ (نمونه دولتی مازندران ۹۵)

۴۳- اگر P مجموعه اعداد اول و  $A = \{x \mid x \in P, x < \sqrt{2000}\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x^2 - 1 < 15\}$  باشد، آن گاه A و B دارای چند عضو مشترک هستند؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۳ (۴) ۲ (تیزهوشان)

۴۴- اگر  $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$  و  $B = \{x \mid x = fn - 1, n \in A\}$  و  $B \subseteq A$ ، آن گاه B چند عضو دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۲۹ (۳) ۷ (۴) ۳۰ (نمونه دولتی تهران ۹۵)

۴۵- مجموعه  $A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}, \sqrt{k} \in \mathbb{N}, 2^k < 70\}$ ، چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (انرژی اتمی ۸۵)

۴۶- مجموعه  $A = \{\frac{\Delta x}{3} \mid \frac{\Delta x}{3} \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}, -10 \leq x \leq 10\}$  چند عضو دارد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۱ (۳) ۴ (۴) ۳ (تیزهوشان ۹۳)

۴۷- مجموعه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x = x^2\}$  چند زیرمجموعه دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۲۷ (۴) ۴۲ (تیزهوشان ۹۳)

۴۸- مجموعه  $A = \{\frac{n^2}{3} \mid n \in \mathbb{Z}, -3 < n \leq 5\}$  چند عضو دارد؟

(۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۴ (آزمون سنجش)

۴۹- مجموعه  $F = \{2x - 3 \mid x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \leq 5\}$  چند عضو مثبت دارد؟

(۱) ۲۵ (۲) ۲۴ (۳) ۲۳ (۴) ۲ (تیزهوشان)

۵۰- کوچک ترین عضو مجموعه  $A = \{x^{2y} \mid x, y \in \mathbb{N}, x - y = 7\}$  کدام است؟

(۱)  $\emptyset$  (۲) ۱ (۳) ۸ (۴) ۶۴ (تیزهوشان)

۵۱- اگر  $A = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 < 5\}$  و  $B = \{x \mid x = 2n - 1, n \in A\}$ ، آن گاه B حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (تیزهوشان ۹۲ هرمزگان)

۵۲- کدام یک از مجموعه های زیر، تعداد عضوهایش از بقیه مجموعه ها بیشتر است؟

(۱)  $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, -6 < n < 6\}$  (۲)  $B = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, \frac{12}{n} \in \mathbb{N}\}$  (۳)  $X = \{7(\frac{10^n - 1}{9}) \mid n \in \mathbb{N}, n < 10\}$  (۴)  $E = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n^2 \leq 25\}$  (سلام ۹۶)

۵۳- در کدام گزینه، همه عضوهای مجموعه فرد هستند؟

(۱)  $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1396\}$  (۲)  $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1396\}$  (۳)  $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, -1396 \leq x \leq 0\}$  (۴)  $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 1396\}$  (تیزهوشان ۹۲ هرمزگان)

۵۴- مجموعه  $A = \{\frac{12x}{x^2} \mid x \in \mathbb{N}, -7 \leq \sqrt{x} \leq 4\}$ ، چند عضو دارد که عدد صحیح نیست؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۶ (تیزهوشان ۹۲ هرمزگان)

(انرژی اتمی ۸۸)

۵۵- اعضای مجموعه A کدام است؟  $A = \{3x^{-y} - 2(-y)^{-x} \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = -2\}$

- (۱)  $\{2, 4, 7, -\frac{7}{2}\}$  (۲)  $\{7, -1, 4, -\frac{7}{4}\}$  (۳)  $\{-1, -7, 2\}$  (۴)  $\{\frac{3}{7}, 1, -2, 7\}$

(لیگ علمی پایا)

۵۶- مجموعه  $J = \{\frac{3x+y}{3x-y} \mid x, y \in \mathbb{N}, xy = 6\}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ عضو (۲) ۲ عضو (۳) ۳ عضو (۴) بی‌نهایت

(نمونه دولتی خراسان ۹۵)

۵۷- مجموعه  $A = \{2^{2x+y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, -4 \leq 2x \leq 2, xy = 12\}$  چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۳۲

(انرژی اتمی ۸۹)

۵۸- مجموعه A چند عضو دارد؟  $A = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = 8\}$

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۵۹- فرض کنید k یک عدد ثابت است و  $A = \{x^k + k \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < k\}$ . اگر بدانیم  $\{6, 9\} \subseteq A$ ، آن‌گاه k عضو کدام مجموعه است؟

- (۱)  $\{5x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$  (۲)  $\{4x+3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$  (۳)  $\{2x+6 \mid x \in \mathbb{Z}\}$  (۴)  $\{3x-4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$  (تیزهوشان ۹۵)

۶۰- رقم یکان کوچک‌ترین عضو چهاررقمی مجموعه  $A = \{15k - 7 \mid k \in \mathbb{N}\}$  چیست؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

(انرژی اتمی ۹۰)

۶۱- اگر E مجموعه اعداد طبیعی زوج و O مجموعه اعداد طبیعی فرد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۰ (۴) ۸۱

$A = \{(x-1)(y-1) \mid x \in E, y \in O, x+y \leq 20\}$

۶۲- مجموعه  $F = \{3 \times (\frac{10^{2n-1} - 1}{9}) \mid n \in \mathbb{N}\}$  با نمایش اعضا برابر است با:

- (۱)  $\{3, 23, 233, 2333, \dots\}$  (۲)  $\{33, 2333, 233333, \dots\}$  (۳)  $\{3, 2333, 233333, \dots\}$  (۴)  $\{3, 303, 30303, \dots\}$

۶۳- مجموعه  $A = \{\frac{3^{x+1}}{9^{2y}} \mid 4y - x = 2\}$  کدام است؟

- (۱)  $\{27\}$  (۲)  $\{\frac{1}{3}\}$  (۳)  $\{9\}$  (۴)  $\{-3\}$

۶۴- مجموعه  $A = \{-\frac{x}{3} \mid -\frac{x}{3} \in \mathbb{Q}, -4 < x \leq 3\}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۶۵- مجموعه I مجموعه عددهای حسابی است. مجموعه A با تعریف زیر چند عضو دارد؟  $A = \{3^x - 3 \mid x \in \mathbb{I}, x \leq 5, (3^x - 3) \in \mathbb{N}\}$

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۶۶- مجموعه  $\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 2, 8, \dots\}$  در کدام گزینه با علائم ریاضی به صورت صحیح مشخص شده است؟

$A = \{2^{2x+1} \mid x \in \mathbb{Z}, x > -2\}$  (۲)  $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -4\}$  (۱)

$A = \{2^{-x} \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 3\}$  (۴)  $A = \{2^{2x-5} \mid x \in \mathbb{N}\}$  (۳)

۶۷- کدام مجموعه زیر، دارای عضو پایانی است؟

- (۱)  $\{n \in \mathbb{N} \mid 2^n > n^3\}$  (۲)  $\{n \in \mathbb{N} \mid 2^n > n^2\}$  (۳)  $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 > 2^n\}$  (۴)  $\{n \in \mathbb{N} \mid n^3 > n^2\}$

(تیزهوشان ۹۵)

۶۸- مجموعه  $\{\frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} < 1, b < 13, a, b \in \mathbb{N}\}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۴۹ عضو (۲) ۴۵ عضو (۳) ۷۸ عضو (۴) ۵۵ عضو

### زیرمجموعه و مسئله‌ها

۶۹- کدام عبارت زیر صحیح نیست؟

- (۱)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  (۲)  $\{\emptyset\} = \emptyset$  (۳)  $\emptyset \not\subseteq \emptyset$  (۴)  $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$



۷۰- کدام گزینه، زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $L = \{a, b, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$  نیست؟

- (۱)  $\{a, b\}$  (۲)  $\{\{a, b\}\}$  (۳)  $\{a, \{a\}\}$  (۴)  $\{b, \{\{a\}\}\}$

(تیزهوشان)

۷۱- مجموعه تمام زیرمجموعه‌های  $M = \{\{\}, \{\emptyset\}\}$  کدام گزینه است؟

- (۱)  $\{\{\}, \{\emptyset\}, M\}$  (۲)  $\{\{\{\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\}, M\}\}$   
 (۳)  $\{\{\}, \{\{\}, \{\emptyset\}\}, M\}$  (۴) مجموعه  $\emptyset$ ، تنها زیرمجموعه  $M$  است.

(تیزهوشان)

۷۲- اگر  $A = \{a, \{1, 2a + b\}\}$  زیرمجموعه مجموعه  $B = \{3, 2a + 1, \{-a, 0\}\}$  باشد، مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱)  $-6$  (۲)  $2$  (۳)  $1$  (۴)  $-9$

(تیزهوشان)

۷۳- مجموعه  $A = \{x \mid \frac{2^0}{1-x} \in \mathbb{Z}\}$ ، دارای چند زیرمجموعه ۱۵ عضوی است؟

- (۱)  $2^{14}$  (۲)  $2^{15}$  (۳)  $15$  (۴)  $16$

(تیزهوشان)

۷۴- اگر  $P$  مجموعه اعداد اول و  $A = \{x \mid x \in P, x < \sqrt{8000}\}$  باشد، کدام گزینه درست است؟

(۴) مجموعه  $A$  و  $P$  عضو مشترک ندارند.

- (۱)  $A \subseteq P$  (۲)  $P \subseteq A$  (۳)  $A = P$

(تیزهوشان)

۷۵- اگر  $A$  دارای  $n$  عضو باشد، مجموعه زیرمجموعه‌های آن چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱)  $2^{n^2}$  (۲)  $n^2$  (۳)  $2^{2^n}$  (۴)  $2n$

۷۶- برای مجموعه‌های  $A, B, C$  می‌دانیم: الف)  $n(A) < n(B) \subseteq C$ ، با توجه به این دانسته‌ها، کدام گزینه حتماً درست است؟

- (۱)  $A \subseteq B$  (۲)  $A \subseteq C$  (۳)  $n(B) < n(C)$  (۴)  $n(A) < n(C)$

۷۷- می‌دانیم  $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$ . اگر  $A = \{1, 2\}$  و  $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $0 \in B$  (۲) مجموعه  $D$  بیش از ۵ عضو دارد. (۳) مجموعه  $B$ ، ۴ عضوی است. (۴)  $\{-1, 0\} \subseteq D$

(نمونه دولتی زنهان ۹۵)

۷۸- مجموعه  $A$  دارای یک زیرمجموعه است. با این فرض کدام عبارت نادرست است؟

- (۱)  $A \subseteq \{a\}$  (۲)  $A \subseteq \{0, a\}$  (۳)  $A \subseteq \{a, b, c, \dots\}$  (۴)  $A \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

۷۹- مجموعه  $\{2, 3, 4, x, y\}$  دارای ۸ زیرمجموعه است. در این صورت حداقل مقدار  $(x + y)$  برابر است با:

- (۱)  $4$  (۲)  $5$  (۳)  $6$  (۴)  $7$

۸۰- اگر مجموعه  $A = \{-1, -2, -8, 2x, y + 1, z\}$  دارای هفت زیرمجموعه محض باشد، آن‌گاه حداقل مقدار  $x + y + z$  کدام است؟

(آزمون سنه ۹۰)

- (۱)  $10$  (۲)  $-21$  (۳)  $-10$  (۴)  $-11$

۸۱- اگر  $A = \{x \mid -3x - 1 \geq -16, x \in \mathbb{W}\}$ ، آن‌گاه مجموعه  $A$  چند زیرمجموعه دارد که شامل صفر نیست اما شامل ۴ می‌باشد؟

- (۱)  $5$  (۲)  $16$  (۳)  $4$  (۴)  $10$

۸۲- چند مجموعه مانند  $A$  می‌توان یافت که رابطه مقابل برای آن برقرار باشد؟

$\{2, 4, 6, 8\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

- (۱)  $6$  (۲)  $1008$  (۳)  $64$  (۴)  $128$

۸۳- مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  چند زیرمجموعه دارد که زیرمجموعه هیچ کدام از مجموعه‌های  $\{1, 2, 3, 4\}$  و  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  نباشد؟

(انرژی اتمی ۹۶)

- (۱)  $52$  (۲)  $80$  (۳)  $84$  (۴)  $56$

۸۴- چند زیرمجموعه ۳ عضوی از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$  وجود دارد که عدد ۱۰ حتماً عضو آن بوده و ۲ و ۳ عضو آن نباشد؟

(تیزهوشان)

- (۱)  $78$  (۲)  $66$  (۳)  $156$  (۴)  $122$

۸۵- اگر  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  باشد، چند زیرمجموعه ۴ عضوی از  $A$  می‌توان نوشت که کوچک‌ترین عضو آن ۳ باشد؟

- (۱)  $3$  (۲)  $6$  (۳)  $4$  (۴)  $5$

۸۶- چند زیرمجموعه از مجموعه  $P = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  حداقل یک عدد اول دارد؟

- (۱)  $128$  (۲)  $192$  (۳)  $224$  (۴)  $240$



۸۷- مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۶، چند زیرمجموعه دارد که اعضای آن عدد اول باشند؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۵ (۳) ۸ (۴) ۷

۸۸- اگر  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$ ، تعداد زیرمجموعه‌های  $A$  که دو عضو اول دارند، کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۸۹- اگر مجموعه‌ای دارای ۴۵ زیرمجموعه ۲ عضوی باشد، این مجموعه چند زیرمجموعه ۹ عضوی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۲۹

۹۰- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  را در نظر می‌گیریم. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی  $A$  را با  $n_2$ ، تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی  $A$  را با  $n_3$ ، ... و تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی  $A$  را با  $n_6$  نشان می‌دهیم. حاصل  $n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$  کدام است؟

- (۱) ۵۸ (۲) ۵۷ (۳) ۵۶ (۴) ۵۵

۹۱- مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$  چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که جمع عضوهای آن برابر با ۱۵ باشد و عدد ۴، عضو آن باشد؟

- (تیزهوشان) (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) چنین مجموعه‌ای وجود ندارد.

۹۲- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $2n - 1$  عضوی برابر با ۳۲ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

- (علامه طباطبایی ۸۰) (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۳۲

۹۳- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $(n + 3)$  عضوی، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $(n - 1)$  عضوی است؟

- (تیزهوشان) (۱) ۸ (۲) ۳۲ (۳)  $n + 2$  (۴) ۱۶

۹۴- مجموعه  $A$  تعداد ۹۶ زیرمجموعه بیشتر از مجموعه  $B = \{a, e, i, o, u\}$  دارد. مجموعه  $A$  چند عضو دارد؟

- (روبوکاپ ۱۹۶) (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

۹۵- اگر به عضوهای مجموعه  $A$ ، ۲ عضو اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌هایش ۱۹۲ واحد اضافه می‌شود. عدد اصلی مجموعه  $A$  کدام است؟

- (تیزهوشان) (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۹۶- اگر تعداد زیرمجموعه محض یک مجموعه  $k + 3$  عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k + 5$  عضوی ۹۷ عدد کم‌تر باشد، مجموعه  $k + 2$  عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۹۷- اگر از اعضای مجموعه  $B$  سه عضو کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۲۴ عضو کاسته می‌شود. مجموعه  $B$  چند عضو دارد؟

- (نمونه دولتی زنجان ۹۵) (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۱۱

۹۸- تفاوت تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k + 3$  عضوی، از ۱۰ برابر زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k$  عضوی ۶۴ است. این مجموعه  $k$  عضوی چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۷۰

۹۹- اگر  $A$  مجموعه اعداد دورقمی طبیعی باشد، آن‌گاه زیرمجموعه  $A$  که عضوهای آن به شکل  $5k$  و  $k \in A$  است، چند عضو دارد؟

- (روبوکاپ ۱۸۵) (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۱

۱۰۰- مجموعه  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند زیرمجموعه دارد که در آن سه عدد متوالی یافت نمی‌شود؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۱۰۱- بیشترین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعه‌ای ۷ عضوی که هر دو تا ایشان فقط در یک عضو مشترک هستند، کدام است؟

- (کالنگور ۱۹۹۹) (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۰۲- چند زیرمجموعه از اعداد طبیعی وجود دارد که حاصل ضرب اعضای آن در یکدیگر، ۴۵ می‌شود؟

- (تیزهوشان ۹۵) (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

(انرژی اتمی ۹۷)

۱۰۳- یک زیرمجموعه از مجموعه  $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  مانند  $A$  را خوش‌شانس می‌نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کند:

• حداقل یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ عضو  $A$  باشد.

• از بین ۴ و ۵ یا هر دو، عضو  $A$  باشند یا هیچ‌یک عضو  $A$  نباشند.

• از بین ۶، ۷ و ۸ دقیقاً یکی عضو  $A$  باشد.

مجموعه  $X$  چند زیرمجموعه خوش‌شانس دارد؟

(۱) ۱۶۸ (۲) ۹۶ (۳) ۷۲ (۴) ۴۲

۱۰۴- مجموعه  $S$  را مساوی مضرب‌های عدد ۶ در نظر می‌گیریم. کدام مجموعه، زیرمجموعه  $S$  خواهد بود؟

(الف) مجموعه مضرب‌های ۳. (ب) مجموعه مضرب‌های ۹. (پ) مجموعه مضرب‌های ۱۲.

(۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) فقط (پ) (۴) فقط (الف) و (پ)

۱۰۵- مجموعه  $A$  مجموعه‌ای ۶ عضوی است که جمع اعضایش ۴۰ است. همهٔ زیرمجموعه‌های  $A$  (که عضو تکراری در آن‌ها نباشد) را می‌نویسیم و

(تیزهوشان)

حاصل جمع اعضای هر کدام را روی تخته‌سیاه یادداشت می‌کنیم. جمع اعداد یادداشت‌شده چه قدر است؟

(۱) ۱۱۰۰ (۲) ۱۲۸۰ (۳) ۲۵۶۰ (۴) ۳۱۰۰

۱۰۶- یک زیرمجموعه از  $\mathbb{N}$  (اعداد طبیعی) را «خوب» می‌نامیم: در صورتی که بتوان اعضای آن را به دو دسته تقسیم کرد که جمع اعداد دسته

(تیزهوشان)

اول با جمع اعداد دسته دوم برابر شود. کدام مجموعه زیر «خوب» است؟

(۱)  $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$  (۲)  $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 20^2\}$  (۳)  $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$  (۴)  $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 10^2\}$

(روبوکاپ ۸)

۱۰۷- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  چند زیرمجموعه دو عضوی دارد که مجموع دو عضو آن‌ها، عددی زوج باشد؟

(۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۲۵ (۴) ۵۰

(انرژی اتمی ۹۸)

۱۰۸- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  چند زیرمجموعه غیر تهی دارد که حاصل ضرب اعضایشان مربع کامل باشد؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۱۰۹- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$  چند زیرمجموعه دو عضوی به شکل  $\{x, x+2\}$  دارد؟ یعنی مجموعه‌های دو عضوی‌ای که در هر کدام،

(تیزهوشان)

اختلاف دو عضو برابر ۲ باشد.

(۱) ۹۹ (۲) ۹۷ (۳) ۹۸ (۴) ۹۶

۱۱۰-  $S$  زیرمجموعه شش عضوی از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 11, 12\}$  است که اگر عددهای  $a$  و  $b$  عضو  $S$  باشند، برای  $a < b$ ، عدد  $b$  مضرب  $a$

نیست. کم‌ترین مقدار ممکن برای  $a$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۱-  $S$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 30\}$  است که مجموع هیچ دو عضوی از آن مضرب ۵ نیست.  $S$  حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۱۱۲- در مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$  چند زیرمجموعه سه عضوی وجود دارد، به طوری که مجموع عضوهای این مجموعه‌ها مضرب ۳ باشد؟

(روبوکاپ ۱۵)

(۱) ۲۴ (۲) ۲۷ (۳) ۳۳ (۴) ۳۰

(کالگورو ۲۰۰۵)

۱۱۳- در چند زیرمجموعه ناتهی از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$  حاصل جمع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۱۳ است؟

(۱) ۱۰۲۴ (۲) ۱۱۷۵ (۳) ۱۳۶۵ (۴) ۱۷۸۵

(روبوکاپ ۸۶)

۱۱۴- در چند زیرمجموعه از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$  اختلاف بین کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو برابر ۴ است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴) ۶۴

## ● اعمال روی مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک و تفاضل)

۱۱۵- حاصل  $(A \cap B) \cap (A \cap B')$  کدام است؟

$A \cap B$  (۴)       $\emptyset$  (۳)      A (۲)      B (۱)

(تیزهوشان ۸۲)

۱۱۶- حاصل عبارت  $(A \cup B' \cup C') \cap [A \cup (B \cap C)]$  کدام است؟

$A \cap B \cap C$  (۴)      C (۳)      B (۲)      A (۱)

(تیزهوشان)

۱۱۷- اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، حاصل  $A \cap B'$  کدام است؟

A (۴)      B' (۳)       $\emptyset$  (۲)      M (۱)

(تیزهوشان)

۱۱۸- اگر  $A \subseteq B$  باشد، در این صورت  $A \cup (B \cap A')$  برابر است با:

M (۴)      A' (۳)      B (۲)      A (۱)

۱۱۹- اگر  $A - B = A$  باشد، آن گاه:

$A' \cup B = B$  (۴)       $B - A = B$  (۳)       $A \cap B = B$  (۲)       $A \cup B = A$  (۱)

(سلام ۹۶)

۱۲۰- اگر  $A \cap B = A$  و  $C \subseteq A$ ، حاصل عبارت  $(A - B) \cup (C \cup B)$  کدام است؟

$C \cup A$  (۴)       $\emptyset$  (۳)      C (۲)      B (۱)

(نمونه دولتی تهران ۹۵)

۱۲۱- اگر  $A \subseteq B$  باشد، حاصل  $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$  کدام است؟

$\emptyset$  (۴)      B - A (۳)      B (۲)      A (۱)

۱۲۲- کدام عبارت نادرست است؟

$B \cup (A - B) = A \cap B$  (۴)       $(B - A) \cup (A \cap B) = B$  (۳)       $(A \cup B) - B = A - B$  (۲)       $A - (B - A) = A$  (۱)

۱۲۳- چندتا از روابط زیر همواره درست است؟

(الف)  $(A \cap B) \cup B = B$   
 (ب)  $(A - B) \cup B = A \cup B$   
 (ت)  $(A \cap B \cap C \cap D) \cup (B \cup C) = B \cup C$   
 (۱) ۳ تا      (۲) ۲ تا      (۳) یکی      (۴) صفر

۱۲۴- کدام عبارت ممکن است، درست نباشد؟

$A - B = A \cap B'$  (۲)       $A - B = B' - A'$  (۱)  
 $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$  (۴)       $[A - B] \cup [B - A] \cup (A \cap B) = A' \cup B'$  (۳)

۱۲۵- کدام عبارت درست نیست؟

$A \cap (B \cup A') = A \cap B$  (۲)       $A' \cap (A \cup B) = B - A$  (۱)  
 $A \cup (B' - A) = A \cup B'$  (۴)       $(A \cap (A \cup B)) \cup (B - A) = \emptyset$  (۳)

۱۲۶- کدام عبارت درست است؟

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$  (۲)       $(A \cap B) \cup (A \cap B') = B$  (۱)  
 $A \cap (A' - B') = A \cap B$  (۴)       $(A \cup B) \cup (A - B) = B - A$  (۳)

(انرژی اتمی ۹۵)

۱۲۷- متمم عبارت  $B - [(B - A) \cup (A \cap B)]$  برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

M (۴)      B - A (۳)      A - B (۲)      A (۱)

$(A \cap [(B \cap A') \cup B]) \cap (A - B)$

۱۲۸- حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟

$\emptyset$  (۴)       $A \cap B$  (۳)      B - A (۲)      A - B (۱)

۱۲۹- با چه شرطی حتماً عبارت‌های  $(A \subseteq (B \cap C))$  و  $(A \subseteq (B \cup C))$  درست خواهند بود؟

$A \subseteq B$  یا  $A \subseteq C$  (۴)       $A \subseteq B$  و  $A \subseteq C$  (۳)      فقط  $(A \subseteq B \subseteq C)$  (۲)       $A \subseteq B$  (۱)

۱۳۰- اگر  $A \subseteq B$ ، چند عبارت نادرست است؟

الف) $B' \subseteq A'$	ب) $A' \cup B = M$	پ) $A \cap B' = \emptyset$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)
۴ (۴)	۵ (۵)	۶ (۶)

۱۳۱- اگر  $A \cup C = B \cup D$  و  $A \cap C = B \cap D$ ، آن گاه چندتا از عبارات درست هستند؟

الف) $A \cap B = C \cap D$	ب) $A \cup B = C \cup D$	پ) $A \subseteq B$ و $D \subseteq C$	ت) $A = B$ و $C = D$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

(انرژی اتمی ۹۵)

۱۳۲- اگر  $(A - B) \subseteq B$  باشد، حاصل  $[(A - B') \cup (B - A')] \cap A$  کدام است؟

الف) $A'$	ب) $B$	پ) $A$	ت) $B'$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۳۳- اگر  $A \cap B = A$  و  $C \subseteq A$ ، حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟

الف) $B$	ب) $C$	پ) $\{ \}$	ت) $C \cup A$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۳۴- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، کدام رابطه درست است؟

الف) $(A \cap B) \cup A = B$	ب) $(A \cup B) - B = A \cap B'$	پ) $A - B' = A \cup B$	ت) $(A - B)' = B - A$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۳۵- برای سه مجموعه دلخواه  $A$ ،  $B$  و  $C$  که  $A \subseteq B$ ، آن گاه کدام رابطه درست نیست؟

الف) $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$	ب) $(A - B) \subseteq (B - C)$	پ) $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$	ت) $(B - A) \subseteq (C - A)$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۳۶- چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $(A \cup B) \subseteq D \cup (B \cup A)$	ب) $(A' \cap B') \subseteq (A \cup B)$
پ) $(A - B) \cup C \subseteq (C - B)$	ت) $(X' \cap Y' \cap A \cap B') \subseteq (X \cup Y \cup A' \cup B)$
۱ (۱)	۲ (۲)
۳ (۳)	۴ (۴)

۱۳۷- اگر  $A$  مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۳ و  $B$  مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ باشند و  $x \in (A' \cup B)'$ ، کدام حکم درست است؟

الف) $x$ بر ۳ و ۵ بخش پذیر است.	ب) $x$ بر ۵ بخش پذیر و بر ۳ بخش پذیر نیست.
پ) $x$ نه بر ۳، نه بر ۵ بخش پذیر است.	ت) $x$ بر ۳ بخش پذیر است و $x$ بر ۵ بخش پذیر نیست.

(تیزهوشان ۸۰)

۱۳۸- اگر  $B = \{۳, ۴\}$  و  $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ، آن گاه برای مجموعه  $A$  چند جواب وجود دارد؟

الف) ۱	ب) ۲	پ) ۳	ت) ۴
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۳۹- اگر  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۳ \geq |x|\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < ۹\}$  باشند، مجموعه  $(A - B)$  چند زیرمجموعه دارد؟

الف) ۶۴	ب) ۳۲	پ) ۱۶	ت) ۴
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۴۰- اگر  $A = \{x^2 - m \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ < x \leq m\}$  و  $B = \{x \mid \frac{x}{۳} \in \mathbb{Z}, -۴ < x \leq ۱۲\}$  و  $n(A \cap B) = ۳$  باشند، آن گاه مجموعه  $(A - B)$  حداقل چند عضو دارد؟

الف) ۱	ب) ۲	پ) ۳	ت) ۴
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

(روبوکاپ ۸۶)

۱۴۱- اگر  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x} \leq ۴, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{۲x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ، آن گاه  $A \cap B$  چند عضو دارد؟

الف) ۴	ب) ۳	پ) ۲	ت) ۱
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۴۲- اگر  $A_n = \{۱, ۲, ۳, ۴, \dots, n\}$  در این صورت حاصل  $(A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup \dots \cup A_n)$  کدام است؟

الف) $A_n$	ب) $A_۱ \cap A_n$	پ) $A_۱$	ت) $\emptyset$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۴۳- اگر  $A_i = \{x \mid -i < x < i, x \in \mathbb{N}\}$  حاصل  $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ \cap \dots \cap A_n$  کدام است؟

الف) $\emptyset$	ب) $A_۲ - A_۱$	پ) $A_n$	ت) $A_۲$
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

۱۴۴- اگر  $A_۱ = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰\}$  و  $A_۲ = \{۲, ۳, ۴, \dots, ۱۱\}$  و  $A_۳ = \{۳, ۴, ۵, \dots, ۱۲\}$  و ...، آن گاه  $A = A_۳ \cap A_۴ \cap A_۵ \cap \dots \cap A_۸$  چندعضوی است؟

(دبیرستان البرز)

الف) ۳	ب) ۴	پ) ۵	ت) ۶
۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

**۱۴۵-** سه مجموعه  $A, B, C$  به ترتیب دارای ۲، ۳ و ۴ عضو هستند و هر دوتایشان حداقل یک عضو مشترک دارند.  $A \cup B \cup C$  حداقل و حداکثر چند عضو دارد؟ (علامه ملی)

- (۱) ۴ و ۷ (۲) ۲ و ۴ (۳) ۲ و ۹ (۴) ۳ و ۹

**۱۴۶-**  $A, B, C$  سه مجموعه دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه، تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است (سمت چپ منهای سمت راست)، به طور مثال  $D = A - B$ . کدام گزینه حتماً درست است؟



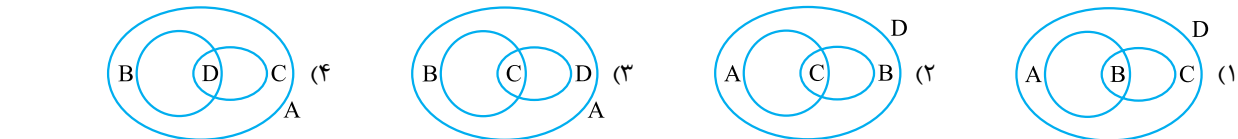
- (۱)  $F \subseteq C$  (۲)  $B \subseteq F$  (۳)  $F \subseteq (A \cap C)$  (۴)  $(A \cap C) \subseteq F$  (۵)  $(D \cap C) \subseteq F$

**۱۴۷-** پنج مجموعه دو عضوی غیرمساوی داریم. در گزینه‌های زیر، هر نقطه، یکی از این مجموعه‌ها را نمایش می‌دهد. اگر اشتراک دو مجموعه تهی نباشد، نقاط مربوط به آن‌ها را به هم وصل کرده‌ایم. کدام یک از اشکال زیر نمی‌تواند مربوط به این پنج مجموعه باشد؟ (تیزهوشان ۹۶)

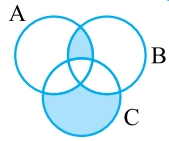


### نمودار ون

**۱۴۸-** اگر  $A$  مجموعه مستطیل‌ها،  $B$  مجموعه مربع‌ها،  $C$  مجموعه لوزی‌ها،  $D$  مجموعه متوازی‌الاضلاع‌ها باشد، کدام گزینه وضعیت این چهار مجموعه را درست نشان می‌دهد؟ (سلام ۹۶)

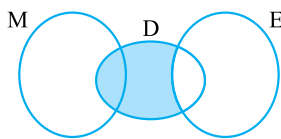


**۱۴۹-** مجموعه‌های  $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 29\}$  و  $B = \{x + 12 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 21\}$  و  $C = \{15, 16, 17, \dots, 35\}$  را در نظر بگیرید. با توجه به شکل، ناحیه‌های رنگی روی هم چند عضو دارند؟ (نمونه دولتی یزد)



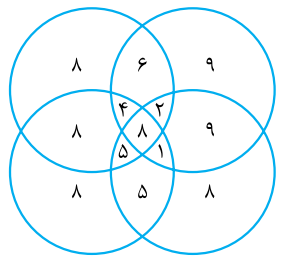
- (۱) ۷ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۴

**۱۵۰-** در نمودار ون مقابل که مربوط به مردم تحصیل کرده یک شهر است، مجموعه  $E$  کسانی هستند که به زبان خارجی مسلط می‌باشند. مجموعه  $D$  دانشجویان شهر و مجموعه  $M$  ریاضی دانان شهر هستند. حالا با توجه به مجموعه‌ها، بخش رنگی شامل کدام گزینه می‌شود؟ (نمونه دولتی آذربایجان غربی ۹۶)



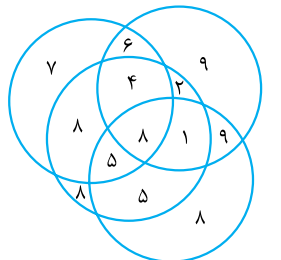
- (۱) دانشجویان ریاضی دان مسلط به زبان خارجی.  
(۲) دانشجویان مسلط به زبان خارجی که ریاضی دان نیستند.  
(۳) دانشجویان ریاضی دان که مسلط به زبان خارجی نیستند.  
(۴) ریاضی دان مسلط به زبان خارجی که دانشجو نیستند.

**۱۵۱-** نمودار ون مقابل ۸۰ نفر از مشترکین تلفن همراه را نشان می‌دهد. هر کدام از دایره‌ها، مربوط به یکی از اپراتورهای  $A, B, C, D$  هستند. برای مثال از روی شکل متوجه می‌شوید که ۸ نفر از همه اپراتورها استفاده می‌کنند. حال اگر با همین مقیاس ۱۰۰۰۰ مشترک تلفن همراه داشته باشیم، چقدر از آن‌ها حداقل از دو اپراتور استفاده می‌کنند؟ (سلام ۹۶ با تغییر)



- (۱) ۳۲۰۰ نفر (۲) ۴۰۰۰ نفر (۳) ۶۸۰۰ نفر (۴) ۶۰۰۰ نفر

**۱۵۲-** در یک نمونه ۸۰ نفری از یک مدرسه ۵۰۰ نفری تعداد افرادی که به هر یک از چهار ورزش شنا، دوچرخه‌سواری، فوتبال و بسکتبال اعلام علاقه‌مندی کردند، مطابق شکل مقابل است. در این صورت در این مدرسه به طور تقریبی چند نفر هستند که تنها به یک ورزش علاقه‌مند هستند؟ (سلام ۹۸)



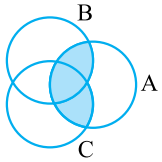
- (۱) ۲۰۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ۳۰۰



۱۵۳- سه مجموعه A، B و C را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌ها، برابر مجموعه‌ اعضای است که دست کم عضو دوتا از این سه مجموعه است؟

(۲)  $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$   
 (۴)  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$

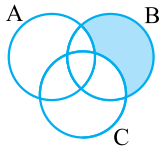
(۱)  $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$   
 (۳)  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$



(۲)  $(A \cup B) \cap C$   
 (۴)  $(A \cup C) \cap B$

۱۵۴- در شکل مقابل قسمت‌های رنگی با کدام مجموعه برابر است؟

(۱)  $(B \cup C) - A$   
 (۳)  $(B \cup C) \cap A$

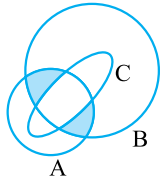


(۲)  $B - (A \cup C)$   
 (۴)  $(A \cup B) - (A \cap C)$

۱۵۵- کدام عبارت نشان‌دهنده مجموعه روبه‌رو نیست؟

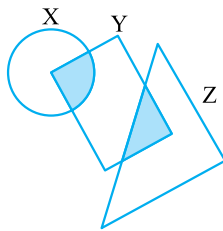
(۱)  $(B - C) - A$   
 (۳)  $(B \cap (B - C)) - (A \cap B)$

(تیزهوشان)



۱۵۶- در شکل زیر ناحیه رنگی کدام است؟

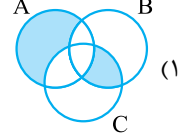
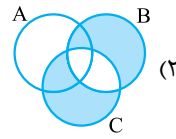
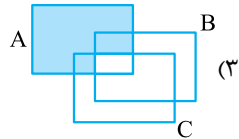
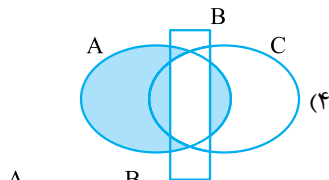
(۱)  $(A - C) \cup (B - C)$   
 (۲)  $(A \cup B) - C$   
 (۳)  $(A \cap B) - C$   
 (۴)  $C - (A \cap B)$



۱۵۷- کدام مجموعه، قسمت رنگی را نشان می‌دهد؟

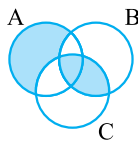
(۱)  $Y - (X \cup Z)$   
 (۲)  $(X \cup Z) - Y$   
 (۳)  $X \cap Y \cap Z$   
 (۴)  $(X \cup Z) \cap Y$

۱۵۸- کدام نمودار، عبارت  $(A - B) \cup (A - C)$  را نشان می‌دهد؟



۱۵۹- کدام عبارت، نشان‌دهنده مجموعه شکل روبه‌رو است؟

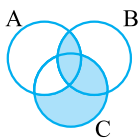
(۱)  $(A - B) \cup (A \cap B)$   
 (۳)  $(A - (B \cup C)) \cup (B \cap C)$



(۲)  $(A - B) - C$   
 (۴)  $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) - C$

۱۶۰- کدام گزینه، قسمت رنگ‌شده را نشان می‌دهد؟

(۱)  $C - (A \cap B)$   
 (۳)  $B \cap (A \cup C)$

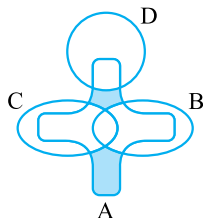


(نمونه دولتی فارس ۹۵)

(۲)  $(A \cap B) \cup (C - A)$   
 (۴)  $(C \cup B) - (A \cap B)$

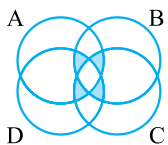
۱۶۱- کدام عبارت، با مجموعه روبه‌رو برابر است؟

(۱)  $(A \cap B \cap C) \cup D$   
 (۲)  $((A - B) - C) - D$   
 (۳)  $A - (B \cap C \cap D)$   
 (۴)  $(A - (B \cap C)) - D$



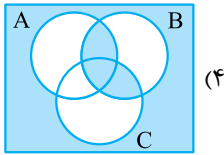
۱۶۲- کدام عبارت، مجموعه مقابل را نشان می‌دهد؟

(۲)  $(A \cap B \cap C) \cup (B \cap C \cap D) \cup (C \cap D \cap A)$   
 (۴)  $(A \cap C) \cup (B \cap D) - (A \cap B \cap C \cap D)$   
 (۱)  $(A \cup B) - (C \cap D)$   
 (۳)  $((A \cap D) - (B \cap C))$

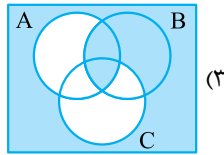




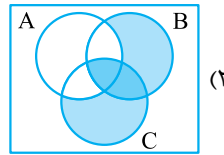
۱۶۳- کدام نمودار نشان‌دهندهٔ مجموعه اعضایی است که فقط در یکی از سه مجموعه  $A \cup B$ ،  $B'$ ،  $C - A$  قرار دارند؟ (انرژی اتمی ۹۷)



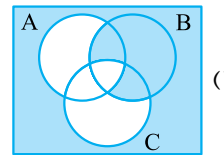
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

### عدد اصلی مجموعه

۱۶۴- در یک گروه هشت نفری ۵ نفر عینک می‌زنند و ۶ نفر ساعت دارند. چند نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت دارند؟ (انرژی اتمی)

- (۱) حداکثر ۳ نفر (۲) حداقل ۳ نفر (۳) دقیقاً ۳ نفر (۴) حداقل ۵ نفر

۱۶۵- در مصاحبه با ۴۰ نفر از کارمندان یک اداره، معلوم شد که ۲۰ نفر دارای تحصیلات دانشگاهی و ۶ نفر دارای اتومبیل شخصی هستند. ۱۶ نفر از آن‌ها نه تحصیلات دارند و نه اتومبیل شخصی. چند نفر در این اداره هم اتومبیل شخصی دارند و هم تحصیلات؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۶۶- در یک گلستان بزرگ ۵۳ شاخه گل وجود دارد. ۲۴ تا از گل‌ها رنگ قرمز و ۲۹ تا از آن‌ها رنگ بنفش دارند. در این گلستان ۶ گل وجود دارد که هر دو رنگ قرمز و بنفش را دارد. چند گل در این گلستان رنگ قرمز و رنگ بنفش ندارند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۶۷- در یک کلاس، ۱۷ نفر عضو تیم «رباتیک» و ۱۳ نفر، عضو تیم «روبوکاپ» (شبهه‌سازی فوتبال روبات‌ها) می‌باشند. اگر ۸ نفر عضو هر دو تیم باشند و ۳ نفر عضو هیچ تیمی نباشند، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟ (روبوکاپ ۱۹)

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۷ (۳) ۲۵ (۴) قابل محاسبه نیست.

۱۶۸- در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۸ نفر ورزش نمی‌کنند و ۲۱ نفر هم اردو نمی‌روند. اگر ۲ نفر هم ورزش نکنند و هم اردو نروند، چند نفر هم ورزش می‌کنند و هم اردو می‌روند؟ (انرژی اتمی ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۶۹- در یک باشگاه ورزشی ۵۹ نفر عضو می‌باشند. ۲۹ نفر در فوتبال، ۳۲ نفر در بسکتبال و ۲۰ نفر در والیبال عضو هستند. از طرفی ۷ نفر در بسکتبال و فوتبال، ۸ نفر در فوتبال و والیبال و ۱۰ نفر در بسکتبال و والیبال عضو می‌باشند. چند نفر فقط در یک رشتهٔ ورزشی عضویت دارند؟ (روبوکاپ ۱۹)

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۰ (۳) ۳۹ (۴) ۳۸

۱۷۰- از یک گروه ۲۰ نفری دبیران، ۱۰ نفر ریاضی، ۹ نفر فیزیک و ۷ نفر شیمی تدریس می‌کنند. می‌دانیم ۴ نفر از آن‌ها فیزیک و ریاضی تدریس می‌کنند و هیچ‌کدام از دبیران ریاضی، درس شیمی تدریس نمی‌کنند. تعداد دبیرانی که فقط فیزیک درس می‌دهند، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷۱- در بین عددهای ۱ تا ۱۰۰۰ چند عدد داریم که مضرب ۲ یا ۳ باشند؟

- (۱) ۳۰۵ (۲) ۳۵۰ (۳) ۳۶۷ (۴) ۳۷۶

۱۷۲- در بین عددهای ۱ تا ۱۰۰۰ چند عدد داریم که مضرب ۲ یا ۳ نباشند؟

- (۱) ۶۳۳ (۲) ۳۶۳ (۳) ۳۶۷ (۴) ۶۳۷

۱۷۳- در بین اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۳۹۶، چند عدد وجود دارد که مضرب ۱۱ نباشد ولی مضرب ۳ باشد؟ (سلام ۹۶)

- (۱) ۸۴ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵۶ (۴) ۴۲۳

۱۷۴- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ داریم که مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ نیست؟

- (۱) ۲۶۶ (۲) ۲۶۸ (۳) ۲۷۰ (۴) ۲۷۲

۱۷۵- ۵۰ نفر دانش‌آموز در یک کلاس المپیاد ثبت‌نام کرده‌اند. ۱۸ نفر از آن‌ها شیمی، ۱۷ نفر نجوم، ۲۴ نفر فیزیک و همگی ریاضی می‌خوانند. از طرفی ۵ نفر فیزیک و شیمی، ۷ نفر فیزیک و نجوم، ۶ نفر شیمی و نجوم و دو نفر همهٔ این موارد را می‌خوانند. چند نفر هستند که فقط المپیاد ریاضی می‌خوانند؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) ۵

۱۷۶- از صد دستگاه خودرو آزمایش فنی به عمل آمده است. ۵۹ دستگاه سالم و بقیه این نواقص را داشتند: ۱۲ خودرو فقط نقص ترمز، ۵ دستگاه نقص ترمز و فرمان، ۸ خودرو نقص ترمز و چراغ، ۵ خودرو نقص چراغ و فرمان و ۳ خودرو نقص ترمز، فرمان و چراغ. همچنین تعداد اتومبیل‌هایی که نقص چراغ یا فرمان داشته‌اند، مساوی است. به ترتیب چند خودرو نقص چراغ و چند خودرو فقط نقص فرمان و چندتا فقط نقص چراغ دارند؟

(۱) ۲۲، ۱۰، ۷ (۲) ۲۱، ۹، ۸ (۳) ۲۲، ۷، ۱۰ (۴) ۲۱، ۸، ۹

۱۷۷- A، B و C سه مجموعه هستند و می‌دانیم تعداد اعضای  $A - B$ ،  $B - C$ ،  $A - B$ ،  $B - C$ ،  $C - A$ ،  $B - A$ ،  $C - B$  به ترتیب ۳، ۲، ۴، ۵ است. تعداد عضوهای مجموعه  $A - C$  چندتا است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) ۴

۱۷۸- از ۱۰۰ دانش‌آموز پایه نهم یک مدرسه، مجموعه A شامل ۴۰ دانش‌آموز، مجموعه B شامل ۶۰ دانش‌آموز و مجموعه C شامل ۷۰ دانش‌آموز را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم  $A \subseteq B$ ، ولی  $B \not\subseteq C$ . چندتا از جمله‌های زیر حتماً درست است؟

(انرژی اتمی ۹۰)

(الف) A و C اعضای مشترک دارند. (ب) A زیرمجموعه C نیست. (پ) مجموعه B حداقل ۱۰ عضو دارد که عضو مجموعه C نیستند.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ صفر

۱۷۹- همه عددهایی که نه بر ۵ و نه بر ۱۱ بخش‌پذیر هستند را از الگوی عددهای متوالی ۱ تا ۱۰۰۰۰ حذف کرده‌ایم. عدد ۲۰۰۴ ام الگوی جدید به دست آمده کدام است؟

(کانون ۲۰۰۳)

(۱) ۱۰۰۰ (۲) ۵۰۰۰ (۳) ۱۰۰۰۰ (۴) ۶۵۴۵ (۵) ۷۳۴۸

### معرفی احتمال

۱۸۰- اگر یک تاس ۱۰ وجهی داشته باشیم، چه قدر احتمال دارد که عدد روشده، اول باشد؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{3}{10}$  (۴)  $\frac{4}{10}$

(تیزهوشان)

۱۸۱- کدام گزینه درست است؟

(۱) احتمال این که تاس مضرب ۲ نیاید، کم‌تر از آن است که تاس مضرب ۳ باشد.

(۲) احتمال این که سکه رو بیاید، بیشتر از آن است که تاس عدد فرد بیاید.

(۳) احتمال این که یک سکه رو بیاید، کم‌تر از این است که دو سکه هم‌زمان رو بیاید.

(۴) احتمال این که مجموع دو تاس هفت شود، بیشتر از این است که مجموع دو تاس ۵ شود.

۱۸۲- از بین اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این عدد مرکب باشد، چند برابر احتمال اول بودن آن است؟

(سلام ۹۸ - با تصحیح گزینه‌ها)

(۱)  $\frac{3}{4}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۲ (۵)  $\frac{5}{4}$

۱۸۳- به کیسه‌ای که ۷ مهره قرمز، ۵ مهره زرد و ۴ مهره سبز در آن قرار داشت، تعداد ۴ مهره قرمز، ۳ مهره زرد و ۱ مهره سبز افزودیم. در این صورت احتمال بیرون آمدن .....

(تیزهوشان)

(۱) همه مهره‌ها را افزایش داده‌ایم.

(۲) زرد را افزایش و قرمز را کاهش داده‌ایم.

(۳) سبز را کاهش و زرد و قرمز را افزایش داده‌ایم.

(۴) سبز و زرد را کاهش و قرمز را افزایش داده‌ایم.

۱۸۴- اگر  $P(A - B) = P(A) - P(B)$  باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $P(B - A) = P(B) - P(A)$  (۲)  $P(B - A) = P(A - B)$

(۳)  $P(B - A) = P(B)$  (۴)  $P(B - A) = 0$

۱۸۵- در یک کیسه، ۱۴ مهره قرمز و تعدادی مهره زرد وجود دارد. احتمال آمدن مهره زرد در یک بار درآوردن مهره ۴۴٪ می‌باشد. تعداد مهره‌های زرد چه قدر است؟

(تیزهوشان)

(۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

**۱۸۶-** در یک برج ۱۳ طبقه، در هر طبقه ۴ واحد آپارتمان وجود دارد. واحدها به شکل ۱A، ۱B، ۱C، ۱D، ۲A، ۲B، ۲C، ...، ۱۳C، ۱۳D نام گذاری شده‌اند. می‌خواهیم یکی از واحدها را به طور تصادفی بخریم، چه قدر احتمال دارد در نام این واحد D یا ۸ وجود داشته باشد؟

$$\frac{4}{13} \quad (1) \quad \frac{3}{13} \quad (2) \quad \frac{21}{52} \quad (3) \quad \frac{17}{52} \quad (4)$$

**۱۸۷-** در یک کیسه ۱۰۰ توپ با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد. شخصی هر روز سر کیسه آمده و یک توپ برمی‌دارد، به آن نگاه می‌کند و به کیسه برمی‌گرداند. او یک ماه این کار را انجام داده است و تا به حال فقط عددهای ۱، ۵، ۳۶، ۴۷، ۴۹ و ۱۰۰ را نتوانسته خارج کند و ببیند. احتمال این که فردا عدد ۴۷ یا ۷۳ را ببیند، چه قدر است؟

$$\frac{1}{50} \quad (1) \quad \frac{1}{100} \quad (2) \quad \frac{21}{100} \quad (3) \quad \frac{1}{6} \quad (4)$$

**۱۸۸-** خانواده‌ای سه فرزند دارند که فرزند اول آن‌ها پسر است. اگر در این خانواده فرزند چهارمی به دنیا بیاید، چه قدر احتمال دارد سه فرزند بعدی هم جنس باشد؟

(نمونه دولتی آذربایجان غربی ۹۶)

$$\frac{1}{16} \quad (1) \quad \frac{1}{8} \quad (2) \quad \frac{3}{16} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

**۱۸۹-** در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای به صورت  $S = \{1, a, 2, b, 3, c, d, 4\}$  است. چند پیشامد با احتمال  $\frac{3}{4}$  برای این آزمایش وجود دارد؟

$$35 \quad (1) \quad 28 \quad (2) \quad 21 \quad (3) \quad 14 \quad (4)$$

**۱۹۰-** با چه احتمالی می‌توان شمارنده‌ای از عدد ۶۰ را که کوچک‌تر از ۷ است، انتخاب کرد؟

$$\frac{1}{6} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4)$$

**۱۹۱-** در یک مسابقه رادیویی، شرکت‌کنندگان باید به سه سؤال سه‌گزینه‌ای پاسخ دهند، شرکت‌کننده به شرطی برنده است که حداقل به دو سؤال از سه سؤال پاسخ درست بدهد. هر شرکت‌کننده با چه احتمالی برنده می‌شود؟

$$\frac{1}{27} \quad (1) \quad \frac{1}{9} \quad (2) \quad \frac{2}{9} \quad (3) \quad \frac{7}{27} \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (5)$$

**۱۹۲-** با دو مهره سفید و سه مهره سیاه یک دستبند ساخته‌ایم. با چه احتمالی یک مهره سفید بین دو مهره سیاه قرار می‌گیرد؟

$$\frac{1}{5} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4)$$

(سلام ۹۸)

**۱۹۳-** دو تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. احتمال این که مجموع اعداد رو شده در دو تاس برابر ۴ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{36} \quad (1) \quad \frac{2}{36} \quad (2) \quad \frac{3}{36} \quad (3) \quad \frac{4}{36} \quad (4)$$

**۱۹۴-** در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع دو عدد ظاهر شده بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (1) \quad \frac{1}{9} \quad (2) \quad \frac{1}{12} \quad (3) \quad \frac{5}{36} \quad (4)$$

(انرژی اتمی ۹۵)

**۱۹۵-** دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که مجموع عددهای روبرو شده عددی اول باشد، چه قدر است؟

$$\frac{5}{12} \quad (1) \quad \frac{4}{9} \quad (2) \quad \frac{5}{9} \quad (3) \quad \frac{7}{12} \quad (4)$$

**۱۹۶-** دو تاس ۶ وجهی و دو سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که یک تاس زوج، یک تاس فرد و سکه‌ها متفاوت ظاهر شوند؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{1}{8} \quad (2) \quad \frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

**۱۹۷-** بهزاد در یک کیسه سنگ‌های آبی، سبز و زرد دارد. تعداد سنگ‌های زرد ۳ برابر سنگ‌های سبز بوده و ۳ برابر سنگ‌های آبی، سنگ سبز وجود دارد. اگر بهزاد یک سنگ بردارد، با چه احتمالی زرد خواهد بود؟

$$\frac{9}{13} \quad (1) \quad \frac{7}{13} \quad (2) \quad \frac{9}{11} \quad (3) \quad \frac{7}{11} \quad (4)$$

**۱۹۸-** با چه احتمالی خانمی که سه فرزند دارد، بیش از یک دختر خواهد داشت به شرطی که بدانییم او حداقل یک دختر دارد؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{3}{5} \quad (2) \quad \frac{4}{7} \quad (3) \quad \frac{5}{8} \quad (4)$$

۱۹۹- در پایه نهم آموزشگاهی ۴۵ دانش آموز در درس حساب، ۵۲ دانش آموز در درس فیزیک و ۲۱ دانش آموز هر دو درس را ثبت نام کرده اند. اگر تعداد کل دانش آموزان پایه نهم آموزشگاه برابر ۲۰۰ نفر باشد، احتمال آن که دانش آموزی نه درس فیزیک و نه حساب را ثبت نام نکرده باشد، چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{62}$  (۲)  $\frac{1}{97}$  (۳)  $\frac{3}{485}$  (۴)  $\frac{4}{38}$

۲۰۰- افراد A, B, C, D دور یک میز دایره ای می نشینند. چه قدر احتمال دارد که A و B روبه روی هم باشند؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۲۰۱- می خواهیم با رقم های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ عددهای ۵ رقمی بسازیم. چه قدر احتمال دارد عدد ساخته شده فرد باشد؟

- (۱)  $\frac{5}{9}$  (۲)  $\frac{4}{9}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۲۰۲- امیرعلی در ۱۰ دور مسابقه بولینگ به میانگین امتیاز ۱۸۷ رسیده است. برای ورود به مرحله نهایی باید در ۱۱ دور مسابقه حداقل میانگین ۱۸۸ را داشته باشد. می دانیم او در دور ۱۱ ام می تواند از ۱۸۱ تا ۲۰۰ امتیاز کسب کند، احتمال ورود او به مرحله نهایی چه قدر است؟

- (۱) ۱۸ درصد (۲) ۱۵ درصد (۳) ۱۲ درصد (۴) ۹ درصد

۲۰۳- قطاری از یک لوکوموتیو و ۵ واگن به نام های A, B, C, D, E تشکیل شده است. چه قدر احتمال دارد واگن A همیشه از B نزدیک تر به لوکوموتیو باشد؟  
(کلگورو ۲۰۰۶ با تغییر)

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{3}{4}$  (۵)  $\frac{1}{5}$

۲۰۴- دو تاس داریم که اعداد روی وجه های آن ها ۱، ۲، ۳، ۴، ۳، ۳ هستند. تاس ها را می ریزیم و مجموع اعداد رو شده را یادداشت می کنیم، با چه احتمالی عدد یادداشت شده فرد است؟

- (۱)  $\frac{1}{9}$  (۲)  $\frac{2}{9}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{4}{9}$

۲۰۵- یک جفت تاس سالم و معمولی را یک بار پرتاب کرده و عددهای رو شده را جمع می کنیم. مجموع به دست آمده برابر قطر یک دایره است. با چه احتمالی، مقدار عددی مساحت دایره از مقدار عددی محیط آن کم تر است؟

- (۱)  $\frac{1}{36}$  (۲)  $\frac{1}{12}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۲۰۶- عددهای طبیعی و تصادفی X و Y کوچک تر از ۵۱ هستند. چه قدر احتمال دارد که حاصل جمع آن ها برابر ۵۱ باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{100}$  (۲)  $\frac{1}{25}$  (۳)  $\frac{1}{50}$  (۴)  $\frac{1}{51}$

۲۰۷- یک پارکینگ دارای ۱۶ محل پارک در یک ردیف کنار هم است، ۱۴ اتومبیل می رسند. هر کدام به طور تصادفی پارک می کنند و هر کدام به یک جای پارک نیاز دارند. پندار با یک اتومبیل بزرگ می رسد، او به دو جای پارک برای توقف خودرو خود نیاز دارد. او با چه احتمالی می تواند پارک کند؟

- (۱)  $\frac{3}{16}$  (۲)  $\frac{2}{16}$  (۳)  $\frac{1}{16}$  (۴)  $\frac{1}{32}$

۲۰۸- در پرتاب سکه ای سالم، پیشامدهای زیر را در نظر می گیریم:

(الف) اگر سکه ای ۲ بار پرتاب شود، یک بار پرتاب شیر بیاید = A. (ب) اگر سکه ای ۱۰ بار پرتاب شود، در ۵ بار پرتاب شیر بیاید = B.

(پ) اگر سکه ای ۱۰۰ بار انداخته شود، در ۵۰ بار پرتاب شیر بیاید = C.

با این شرایط، کدام رابطه زیر درست است؟

- (۱)  $P(A) < P(B), P(C) < P(B)$   
(۲)  $P(A) = P(B) = P(C)$   
(۳)  $P(A) > P(B) > P(C)$   
(۴)  $P(A) < P(B) < P(C)$

۲۰۹- سارا یک عدد را به طور تصادفی از مجموعه {۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰} انتخاب می کند. روزبه و اشکان نیز هر کدام یک عدد تصادفی از مجموعه {۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰} انتخاب می کند. با چه احتمالی حاصل ضرب سه عدد انتخابی آن ها توانی از ۲ نیست؟  
(مسابقات ریاضی کاتارا ۲۰۱۸)

- (۱)  $\frac{117}{125}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{98}{125}$  (۴)  $\frac{3}{5}$  (۵)  $\frac{64}{125}$

۲۱۰- عدد  $m$  به شکل تصادفی از بین اعضای مجموعه  $\{11, 13, 15, 17, 19\}$  و عدد  $n$  نیز به شکل تصادفی از بین اعضای مجموعه  $\{2018, 2001, 2000, 1999\}$  انتخاب می‌شوند. با چه احتمالی یکان عدد  $m^n$  برابر یک خواهد بود؟

(۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{10}$

(۴)  $\frac{7}{20}$  (۵)  $\frac{2}{5}$

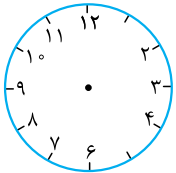
۲۱۱- از ساعت دیواری روبه‌رو، سه تا از شماره‌ها افتاده‌اند. می‌دانیم دوتا از آن‌ها شماره‌های ۱ و ۵ هستند. احتمال این که مثلثی

(انرژی اتمی ۹۷)

که رأس‌های آن روی شماره‌های افتاده قرار دارد حاده‌الزاویه (همه زاویه تند باشند) باشد، چند است؟

(۱)  $0/6$  (۲)  $0/2$

(۳)  $0/25$  (۴)  $0/3$



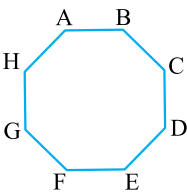
۲۱۲- فرض کنید  $A, B, C, D, E, F, G, H$  به همین ترتیب رأس‌های یک ۸ضلعی منتظم هستند. به تصادف یکی از رأس‌های  $C, D, E, F, G$  و  $H$  را انتخاب کرده و پاره‌خطی از آن به  $A$  می‌کشیم. دوباره از همان شش رأس، نقطه‌ای انتخاب کرده و این بار آن را به  $B$  وصل می‌کنیم. احتمال

(کانون پرو ۲۰۱۳)

این که ۸ضلعی با این دو پاره‌خط به سه ناحیه تقسیم شود، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{4}{9}$

(۴)  $\frac{5}{18}$  (۵)  $\frac{1}{3}$



### اصل متمم و احتمال مستقل

(نمونه دولتی ۹۵)

۲۱۳- ۴ سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که حداقل یک سکه «رو» ظاهر شود، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{12}{16}$  (۲)  $\frac{13}{16}$  (۳)  $\frac{7}{8}$  (۴)  $\frac{15}{16}$

۲۱۴- یک نرم‌افزار عددساز روی یک کامپیوتر کار می‌کند و از ۱ تا ۲۰، سه عدد تصادفی طبیعی انتخاب می‌کند. احتمال آن که هر سه عدد انتخابی

کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشند، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{64}$  (۲)  $\frac{1}{48}$  (۳)  $\frac{1}{36}$  (۴)  $\frac{1}{16}$

(سلام ۹۸)

۲۱۵- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که عدد تاس دوم بزرگ‌تر از عدد تاس اول باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{10}{24}$  (۲)  $\frac{12}{24}$  (۳)  $\frac{9}{24}$  (۴)  $\frac{6}{24}$

۲۱۶- در یک مسابقه، شما ۴ توپ با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ دارید که باید به ترتیب در جعبه‌های  $A, B, C, D$  قرار بگیرند. اما شما نام جعبه‌ها را

نمی‌بینید. اگر قرار باشد، تصادفی حدس بزنید، چه قدر احتمال دارد تا با چهار انتخاب برنده شوید؟

(۱)  $\frac{1}{256}$  (۲)  $\frac{1}{24}$  (۳)  $\frac{1}{10}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۲۱۷- روی وجه‌های یک مکعب عددهای  $3, -2, -1, 0, 1, 2$  را نوشته‌ایم. مکعب را دو بار می‌اندازیم، احتمال آن که حاصل ضرب دو عدد به دست

(کانون پرو ۲۰۱۷)

آمده منفی باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{11}{36}$

(۴)  $\frac{13}{36}$  (۵)  $\frac{1}{3}$

۲۱۸- جعبه شماره (۱) شامل ۱ گوی سفید، ۳ گوی بنفش و ۲ گوی طلایی است. جعبه شماره (۲) شامل ۲ گوی بنفش و ۲ گوی طلایی است. از هر

جعبه به طور تصادفی یک گوی برمی‌داریم. با چه احتمالی هر دو گوی هم‌رنگ هستند؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{16}{45}$  (۳)  $\frac{5}{12}$  (۴)  $\frac{5}{6}$



**۲۱۹-** در مسابقات والیبال قهرمانی جهان در فینال، سه مسابقه برگزار می‌شود. تیم برتر در مجموع این سه مسابقه، قهرمان است. فرض کنید ایران و برزیل به این مرحله فینال رسیده‌اند و احتمال پیروزی ایران در هر بازی برابر برزیل  $\frac{60}{100}$  است. احتمال آن که بازی سوم برای تعیین قهرمان لازم باشد، چه قدر است؟

- / ۲۴ (۱)      ○ / ۳۶ (۲)      ○ / ۴۸ (۳)      ○ / ۵۲ (۴)

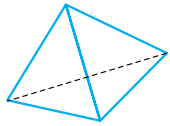
۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

**۲۲۰-** از کیسه‌ای شامل ۹ گوی شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۹، در سه نوبت، هر بار یک گوی بیرون می‌آوریم و در جدول روبه‌رو، خانه مربوطه را ضربدر می‌زنیم (گوی‌ها را به کیسه برنمی‌گردانیم). چه قدر احتمال دارد که همه خانه‌های یک سطر یا ستون یا قطر این جدول علامت‌دار شوند؟

(تیزهوشان ۹۶)

- / ۵۰۴ (۱)      ○ / ۲۴ (۲)      ○ / ۳۰ (۳)      ○ / ۴۸ (۴)

**۲۲۱-** چهارتا چهاروجهی منتظم (هرم منتظم با وجه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع) و روی وجه‌های هر کدام از آن‌ها عددهای ۱، ۷، صفر و ۲ را نوشته‌ایم. اگر این تاس‌ها را بیاندازیم، احتمال این که بتوانیم با عددهایی که دیده می‌شوند عدد ۲۰۱۷ را بسازیم، چه قدر است؟



- / ۲۵۶ (۱)      ○ / ۶۳ (۲)      ○ / ۸۱ (۳)      ○ / ۲۹ (۴)

**۲۲۲-** عددهای صحیح  $a, b, c, d$  از بین عددهای صفر تا ۲۰۰۷ انتخاب می‌شوند (عددها می‌توانند تکراری باشند). با چه احتمالی  $ad - bc$  زوج است؟

- / ۸ (۱)      ○ / ۱۶ (۲)      ○ / ۳ (۳)      ○ / ۷ (۴)

**۲۲۳-** روی ۷ تاس یکسان، عددهای ۱ تا ۶ نوشته شده است. فرض کنید  $P$  احتمال آن است که مجموع عددهای روشده در پرتاب این هفت تاس، برابر ۱۰ شود.  $P$  احتمال کدام مجموع عددهای روشده این تاس‌ها نیز است؟

- / ۱۳ (۱)      ○ / ۲۶ (۲)      ○ / ۳۲ (۳)      ○ / ۳۹ (۴)

**۲۲۴-** در یک کیسه، ۵ گوی با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ وجود دارد. از درون کیسه و بدون برگرداندن گوی‌ها به آن، گوی برمی‌داریم تا وقتی که حاصل جمع عددهای بیرون آمده از عدد ۴ عبور کند. احتمال آن که ۳ گوی برای برداشتن مورد نیاز باشد، چه قدر است؟

- / ۱۵ (۱)      ○ / ۱۰ (۲)      ○ / ۶ (۳)      ○ / ۵ (۴)

**۲۲۵-** یک کیسه شامل ۲ سنگ قرمز و ۲ سنگ آبی است. کیسه دوم حاوی ۲ سنگ قرمز، ۲ سنگ آبی و  $g$  تا سنگ سبز است. برای هر کیسه احتمال برداشتن دو سنگ هم‌رنگ بدون جای‌گذاری را محاسبه کرده‌ایم. (دو سکه جدا از هم برداشته می‌شوند) اگر احتمال محاسبه شده برای کیسه‌ها مساوی باشند،  $g$  برابر است با:

(مسابقات ریاضیات کاتار ۲۰۱۴)

- / ۴ (۱)      ○ / ۵ (۲)      ○ / ۶ (۳)      ○ / ۷ (۴)      ○ / ۸ (۵)

**۲۲۶-** کوروش، امیر و سینا هر کدام تاس می‌اندازند. کوروش برنده می‌شود، اگر عدد ۱ یا ۲ یا ۳ بیاورد. امیر برنده می‌شود، اگر تاس ۴ یا ۵ بیاید و سینا اگر ۶ بیاورد. کوروش، امیر و سینا به همین ترتیب تاس می‌اندازند و اگر کسی برنده شود، بازی تمام است. احتمال برد سینا چه قدر است؟ (کنگورو ۲۰۰۷)

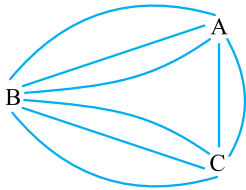
- / ۶ (۱)      ○ / ۸ (۲)      ○ / ۱۱ (۳)      ○ / ۱۳ (۴)      ○ / ۵ (۵)

### ● شمارش و احتمال

**۲۲۷-** یک کیف رمزدار، دارای رمز ۳ رقمی با رقم‌های متفاوت است. اگر امتحان کردن هر شماره رمز ۲ دقیقه طول بکشد، برای بدشانس‌ترین فرد، چند دقیقه طول می‌کشد تا شماره رمز کیف را پیدا کند؟

- / ۲۰۰۰ (۱)      ○ / ۱۸۰۰ (۲)      ○ / ۱۲۹۶ (۳)      ○ / ۲۰۰۲ (۴)





**۲۲۸-** بین شهرهای A و B، ۳ جاده، بین شهرهای A و C، ۲ جاده و بین شهرهای B و C، ۳ جاده احداث شده است. به چند طریق می‌توان با طی حداکثر ۲ جاده، از A به B رفت؟ (سلام ۸۸)

- (۱) ۶  
(۲) ۹  
(۳) ۱۲  
(۴) ۱۸

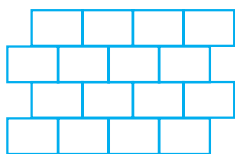
**۲۲۹-** با چهار پرچم به رنگ‌های قرمز، آبی، زرد و سبز می‌توانیم پیام ارسال کنیم. می‌توانیم از یک تا چهار پرچم در ساخت پیام استفاده کرده و ترتیب‌های مختلف، پیام مختلف دارد. در کل چند پیام مختلف می‌توان ساخت؟

- (۱) ۶۴  
(۲) ۳۶  
(۳) ۴۸  
(۴) ۷۲



**۲۳۰-** خانه‌های جدول مقابل را می‌خواهیم با چهار رنگ آبی، زرد، سبز و قرمز رنگ بزنیم، به طوری که هیچ دو خانه مجاور هم‌رنگ نباشند. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟ (خانه‌هایی مجاور هستند که رأس یا ضلع مشترک دارند). (سلام ۸۹)

- (۱) ۱۲  
(۲) ۲۴  
(۳) ۴۸  
(۴) ۹۶



**۲۳۱-** به چند طریق می‌توان مستطیل‌های مقابل را با رنگ‌های آبی، قرمز و زرد رنگ آمیزی کرد تا هیچ دو مستطیل مجاور، دارای رنگ یکسان نباشند؟ (انرژی اتمی ۸۷)

- (۱)  $3^4$   
(۲) ۳  
(۳)  $3^4 \times 12^2$   
(۴) ۶



**۲۳۲-** می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را در مثلث‌های شکل زیر بنویسیم. به طوری که حاصل جمع عددها در لوزی‌ها برابر باشد. این عددگذاری به چند طریق انجام می‌شود؟

- (۱)  $(4!)^2$   
(۲)  $8! \times 4$   
(۳)  $4! \times 16$   
(۴)  $\frac{8!}{4!4!}$

**۲۳۳-** در پرتاب هم‌زمان سه تاس عادی، عددهای روشده آن‌ها را جمع می‌کنیم. چند مقدار مختلف ممکن است به دست بیاید؟ (کاتگور و ۲۰۰)

- (۱) ۱۸  
(۲) ۱۷  
(۳) ۱۶  
(۴) ۱۵

**۲۳۴-** در صورتی که اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰۰ را روی یک تابلو بنویسیم، در چند عدد رقم ۹ به کار رفته است؟ (سلام ۹۷)

- (۱) ۲۱۱  
(۲) ۴۰۰  
(۳) ۲۶۴  
(۴) ۲۷۱

**۲۳۵-** چند عدد طبیعی وجود دارند که هر کدام از رقم‌هایشان ۱ یا ۳ بوده و حاصل جمع رقم‌هایشان ۱۰ باشد؟ (کاتگور و ۲۰۰۸)

- (۱) ۲۸  
(۲) ۳۴  
(۳) ۳۵  
(۴) ۵۵

**۲۳۶-** می‌خواهیم دو زیرمجموعه A و B از  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  بنویسیم که  $A \cup B = S$ ،  $A \cap B = \emptyset$ ، مجموع اعضای A زوج و مجموع اعضای B فرد باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (روبوکاپ ۸۳)

- (۱) ۸  
(۲) ۱۲  
(۳) ۱۶  
(۴) ۳۲

**۲۳۷-** به چند طریق می‌توان بین اعداد ۱ تا ۱۱، ۲ عدد انتخاب کرد که مجموع آن‌ها زوج باشد؟ (انرژی اتمی ۸۷)

- (۱) ۲۰  
(۲) ۲۵  
(۳) ۴۰  
(۴) ۴۵

**۲۳۸-** چند زیرمجموعه شش‌عضوی از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 11, 12\}$  دارای چهار عدد زوج و دو عدد فرد است؟

- (۱) ۱۵  
(۲) ۳۰  
(۳) ۱۲۰  
(۴) ۲۲۵

**۲۳۹-** چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز داریم که در آن هر رقم از رقم سمت راست خودش بیشتر باشد؟ (انرژی اتمی ۸۷)

- (۱) ۹۰  
(۲) ۱۲۰  
(۳) ۱۵۰  
(۴) ۱۸۰

**۲۴۰-** در پایان یک جشن، هر یک از شرکت‌کنندگان با همه افراد دیگر دست داده‌اند. با فرض آن که همه شرکت‌کننده‌ها، روی هم ۲۸ بار دست داده باشند، تعداد جمعیت حاضر در جشن چند نفر بوده است؟ (تیزهوشان)

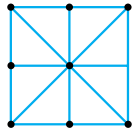
- (۱) ۶  
(۲) ۷  
(۳) ۸  
(۴) ۱۴

(انرژی اتمی)

۲۴۱- روی محیط دایره‌ای ۵ نقطه، مفروض است. چند مثلث می‌توان ساخت به طوری که این ۵ نقطه رئوس آن‌ها باشد؟

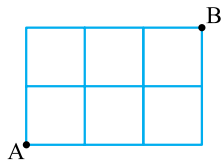
- ۶ (۱)      ۸ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۲ (۴)

۲۴۲- هفت نقطه مطابق شکل، در یک صفحه قرار گرفته‌اند. چند مثلث می‌توان با استفاده از این نقاط ساخت به طوری که هر سه رأس مثلث‌ها



از این نقطه‌ها باشند؟

- ۱۴ (۱)      ۲۸ (۲)      ۳۲ (۴)      ۳۵ (۳)



(مفید ۷۹)

۲۴۳- به چند طریق می‌توان از A به B رفت، به طوری که مسافت طی‌شده حداقل باشد؟

- ۶ (۱)      ۷ (۲)      ۲۵ (۴)      ۱۰ (۳)

۲۴۴- ۵ توپ فوتبال، ۴ توپ بسکتبال و ۳ توپ هندبال داریم. چند توپ برداریم که یقین داشته باشیم برای سه ورزش توپ داریم؟

(انرژی اتمی ۸۶)

- ۳ (۱)      ۸ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۱ (۴)

۲۴۵- در یک جعبه ۸ مهره سیاه، ۹ مهره سفید، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. از داخل جعبه با چشم بسته، حداقل چند مهره خارج

(علامه طباطبایی ۱۵)

کنیم تا مطمئن شویم که در میان مهره‌های منتخب، حداقل ۵ مهره یک رنگ موجود است؟

- ۱۶ (۱)      ۱۴ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۸ (۴)

۲۴۶- در یک اردوی دانش‌آموزی، از بین هر ۳ دانش‌آموزی که انتخاب کنیم، حداقل یکی از آن‌ها عینک دارد. می‌دانیم در این دوره ۴۰ دانش‌آموز

(سلام ۸۹)

عینک دارند. حداقل چند دانش‌آموز به اردو آمده‌اند؟

- ۱۲۱ (۱)      ۱۲۰ (۲)      ۴۳ (۳)      ۴۲ (۴)

۲۴۷- می‌خواهیم ۵ نقطه در صفحه را به گونه‌ای قرار دهیم که بتوان بیشترین تعداد پاره‌خط غیرمقاطع را بین این ۵ نقطه رسم کرد. بیشترین

(علامه طباطبایی ۱۵)

تعداد این پاره‌خط‌ها چند است؟

- ۷ (۱)      ۸ (۲)      ۹ (۳)      ۱۰ (۴)

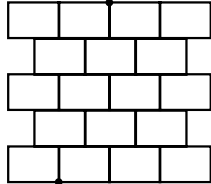
۲۴۸- یک مجموعه از اعداد طبیعی را «نارنجک» می‌نامیم اگر حداقل دو عدد فرد و حداقل دو عدد زوج عضو آن باشند، چند زیرمجموعه از

(انرژی اتمی ۹۸)

مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$  نارنجک نیستند؟

- ۱۲۶ (۱)      ۱۵۹ (۲)      ۱۵۶ (۳)      ۱۳۵ (۴)

(آشپزخانه)



۲۴۹- مورچه‌ای می‌خواهد از اتاق خواب به آشپزخانه برود و این مسیرها را زیر زمین ساخته است ولی می‌خواهد

کوتاه‌ترین مسیر را برود، او راه‌ها را طوری ساخته است که رأس مستطیل‌های به وجود آمده، روی وسط طول

مستطیل‌های مجاورش است. او چند مسیر مختلف دارد؟

- ۴ (۱)      ۶ (۲)      ۱۰ (۴)      ۸ (۳)

اتاق خواب

(انرژی اتمی ۹۷)



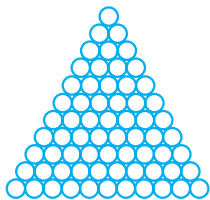
۲۵۰- منظور از «هشت‌تایی» شکل‌هایی به صورت مقابل است که دو دایره به هم چسبیده‌اند:  $\circ\circ, \circ\circ, \circ\circ$  چند شکل هشت‌تایی در این الگو وجود دارد؟

۱۰۸ (۱)

۱۲۰ (۲)

۱۳۵ (۳)

۱۶۵ (۴)



۲۵۱- از بین اعداد  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  دو عدد انتخاب کرده و در هم ضرب می‌کنیم. با چه احتمالی این حاصل ضرب زوج است؟

- ۰/۲ (۱)      ۰/۴ (۲)      ۰/۶ (۳)      ۰/۷ (۴)

**۲۵۲-** اگر حروف کلمه «اسفند» را به طور تصادفی کنار هم بچینیم، چه قدر احتمال دارد که حتماً حروف «س» و «د» کنار هم باشند؟

(۱)  $\frac{1}{30}$  (۲)  $\frac{1}{15}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{2}{5}$

**۲۵۳-** ۶ خانه در یک ردیف قرار دارند و قرار است هر کدام با یک رنگ از رنگ‌های قرمز، آبی، زرد و سبز رنگ شوند. با چه احتمالی هیچ کدام از

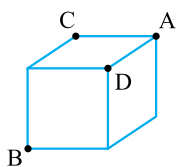
خانه‌های مجاور (به هم چسبیده) هم‌رنگ نیستند؟

(۱)  $(\frac{3}{4})^5$  (۲)  $(\frac{3}{4})^6$  (۳)  $(\frac{2}{3})^5$  (۴)  $(\frac{2}{3})^6$

**۲۵۴-** می‌خواهیم با کوتاه‌ترین مسیر از A به B برویم، فقط می‌توانیم روی یال مکعب حرکت کنیم. چه قدر احتمال

دارد از C عبور کنیم اما از D عبور نکنیم؟

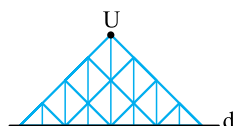
(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{3}{6}$



**۲۵۵-** برای رسیدن از بالای این شکل به پایین آن، فقط مجاز هستیم در سه جهت

خطا حرکت کنیم. چند مسیر مختلف برای رسیدن از نقطه U به خط d داریم؟

(۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۸۱ (۴) ۱۰۰



**۲۵۶-** با شروع از حرف «خ» و با حرکت در جهت  $\rightarrow$  یا  $\leftarrow$  به چند طریق می‌توان کلمه «خیلی‌سبز» را ساخت؟

- خ
- خ ی خ
- خ ی ل ی خ
- خ ی ل ی ل ی خ
- س
- س ب س
- س ب ز ب ز

(۱) ۱۱۹

(۲) ۱۲۱

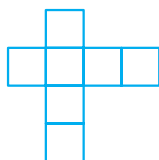
(۳) ۱۲۳

(۴) ۱۲۵

**۲۵۷-** عددهای ۲ تا ۸ را طوری درون مربع‌ها قرار داده‌ایم (بدون تکرار) که حاصل جمع ستون و سطر برابر ۲۱ شده

است. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

(۱) ۴۵ (۲) ۵۴ (۳) ۷۲ (۴) ۸۱



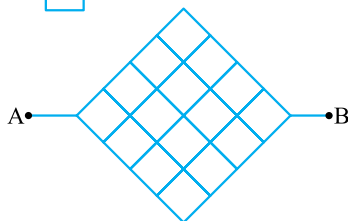
**۲۵۸-** برای طی کردن مسیر از نقطه A به B در کوتاه‌ترین مسیر ممکن، چند راه مختلف داریم؟

(۱) ۶۶

(۲) ۷۰

(۳) ۷۴

(۴) ۷۸



**۲۵۹-** شش لامپ کنار هم داریم که می‌توانند روشن یا خاموش باشند. اگر روشن یا خاموش بودن لامپ‌ها تصادفی باشد، چه قدر احتمال دارد که

حداقل ۳ تا از لامپ‌ها روشن باشند؟

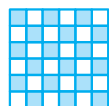
(۱)  $\frac{3}{16}$  (۲)  $\frac{21}{32}$  (۳)  $\frac{5}{16}$  (۴)  $\frac{5}{32}$

**۲۶۰-** یک سکه را شش بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که در ششمین پرتاب، سومین «رو» بیاید، چه قدر است؟

(۱)  $\frac{5}{32}$  (۲)  $\frac{1}{16}$  (۳)  $\frac{5}{64}$  (۴)  $\frac{6}{64}$

**۲۶۱-** در شکل مقابل، چه قدر احتمال دارد مربعی را انتخاب کنیم که بیش از نصف آن رنگی باشد؟

(۱)  $\frac{23}{71}$  (۲)  $\frac{26}{71}$  (۳)  $\frac{27}{71}$  (۴)  $\frac{28}{71}$



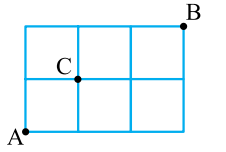
**۲۶۲-** با رقم‌های ۱ تا ۷ و بدون تکرار رقم‌ها، عددی ۷ رقمی ساخته‌ایم. چه قدر احتمال دارد این عدد بر ۲۵ بخش پذیر باشد؟

(۱)  $\frac{1}{14}$  (۲)  $\frac{1}{21}$  (۳)  $\frac{1}{42}$  (۴)  $\frac{1}{2520}$

**۲۶۳-** در یک جعبه ۹ توپ، با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ...، ۹ وجود دارد. به طور هم‌زمان دو توپ برداشته می‌شود، با چه احتمالی مجموع عددهای توپ‌ها، عددی فرد است؟

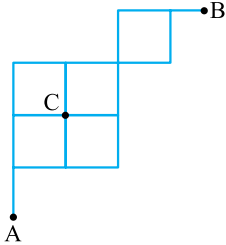
- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{7}{13}$  (۴)  $\frac{6}{11}$

**۲۶۴-** می‌خواهیم با حرکت روی خطوط زیر، از نقطه A به B برویم؛ به طوری که کوتاه‌ترین مسیر را طی کنیم. چه قدر احتمال دارد که از نقطه C عبور نکنیم؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{2}{5}$

**۲۶۵-** رباتی می‌تواند با عبور از روی خط‌های شکل مقابل و حرکت در جهت‌های  $\rightarrow$  یا  $\uparrow$ ، از نقطه A به نقطه B برود. احتمال این که از نقطه C عبور نکند، چه قدر است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$

- (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

**۲۶۶-** سه تاس سالم داریم که وجه‌های هر کدام با عددهای ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شده‌اند. یکی از تاس‌ها قرمز، دیگری آبی و دیگری زرد است. تاس‌ها را یک بار می‌ریزیم، با چه احتمالی برای عددهای روبروده، عدد زرد < عدد آبی < عدد قرمز؟

- (۱)  $\frac{5}{12}$  (۲)  $\frac{7}{25}$  (۳)  $\frac{4}{45}$  (۴)  $\frac{5}{54}$

**۲۶۷-** اگر چهار نفر به طور تصادفی، شناسنامه‌هایشان را از روی میز بردارند، احتمال این که حداقل دو نفر از آن‌ها شناسنامه خود را بردارد، چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{5}{8}$  (۲)  $\frac{3}{8}$  (۳)  $\frac{6}{24}$  (۴)  $\frac{7}{24}$  (انرژی اتمی ۹۸)

**۲۶۸-** در یک کلاس، تعداد دانش‌آموزان راست‌دست ۴۰٪ بیشتر از تعداد دانش‌آموزان چپ‌دست است. اگر بدانیم که احتمال انتخاب یک تیم دو نفره راست‌دست - چپ‌دست از این کلاس برابر  $\frac{1}{4}$  است، تعداد دانش‌آموزان کلاس چند نفر است؟

(کاتگور و ۲۰۱۸)

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

(۵) چنین حالتی امکان ندارد.

### احتمال در فضای پیوسته

**۲۶۹-** در یک دایره، چند ناحیه مختلف که با شعاع‌های دایره ساخته شده‌اند، رنگ شده‌اند. زاویه مرکزی رنگ‌های قرمز، آبی، زرد، سبز به ترتیب برابر ۵۳، ۲۹، ۳۷ و ۹۱ درجه است. یک ناحیه سفید هم داریم، با چه احتمالی، پیکان چرخان روی ناحیه سفید قرار می‌گیرد؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{5}{12}$  (۳)  $\frac{7}{12}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

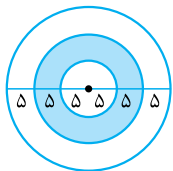
**۲۷۰-** دو عدد حقیقی را به طور تصادفی و مستقل از بازه  $[-20, 10]$  انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی حاصل ضرب این دو عدد از صفر بزرگ‌تر است؟

- (۱)  $\frac{1}{9}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{4}{9}$  (۴)  $\frac{5}{9}$

**۲۷۱-** مثلثی دارای یک زاویه ۶۰ درجه است، با چه احتمالی مثلث دارای سه زاویه تند است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

**۲۷۲-** یک صفحه دایره به شکل مقابل است، احتمال برخورد دایره به ناحیه تیره‌تر چه قدر است؟



- (۱)  $\frac{1}{9}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{2}{5}$

**۲۷۳-** یک قورباغه روی یک نقطه ایستاده و سه پرش با طول مساوی و به اندازه ۱ متر انجام می‌دهد. او می‌تواند در جهت دلخواه بپرد، با چه

احتمالی در فاصله ۱ تا ۲ متری از نقطه شروع متوقف می‌شود؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{2}{5}$